Definitionen

- Imaginäre Einheit i: $i^2 = -1$
- Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$: $z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$
- Komplexe Konjugation: $\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi, \quad a, b \in \mathbb{R}; \qquad z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $\overline{(\overline{z})} = z$, $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b} \quad a, b, z \in \mathbb{C}$
- Betrag einer komplexen Zahl $z = a + bi$: $|z|^2 = a^2 + b^2 = z\overline{z}, \quad a, b \in \mathbb{R}$
- Realteil, Imaginärteil: $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$, $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$
- Addition von komplexen Zahlen (wie Vektoren): $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + b_2) + (b_1 + b_2)i$
- Darstellung z in "Polarkoordinaten": $\arg(z) := \varphi \Longrightarrow z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}$
- de Moivre: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\cos n\varphi$
- $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$
- Multiplikation mit komplexer Zahl: Drehstreckung: Streckung um Faktor $|z|$, Drehung um φ in math. pos. Richtung: $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
- primitive n-te Einheitswurzel: $\varepsilon_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, ε_n^0 bis ε_n^{n-1} sind Nullstellen von $x^n - 1$
- Matrizendarstellung von komplexen Zahlen: $z = a + bi \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Komplexe Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene

- Geometrische Interpretation: Gauß'sche Zahlenebene: x-Achse reeller Teil, y-Achse imaginärer Teil
- $a \in \mathbb{C}$ bezeichnet die komplexe Darstellung des Punktes A
- $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ schließen den Winkel α ein: $\frac{d-c}{b-a}e^{-i\alpha} = \frac{\overline{d}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{a}}e^{i\alpha}$
- p, a, b auf einer Geraden: $\frac{p-a}{a-b} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \frac{p-a}{a-b} = \frac{\overline{p}-\overline{a}}{\overline{a}-\overline{b}} \Longleftrightarrow a\overline{b} + b\overline{p} + p\overline{a} = \overline{a}b + \overline{b}p + \overline{p}a$
- $\overline{AB} | \overline{CD} \Longleftrightarrow \frac{a-b}{c-d} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \frac{a-b}{a-c} = \frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}}$
- $\overline{AB} \perp \overline{CD} \Longleftrightarrow \frac{a-b}{c-d} \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \frac{a-b}{a-c} = -\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}}$

- Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ gleichsinnig ähnlich $\iff \frac{a_1-b_1}{a_1-c_1} = \frac{a_2-b_2}{a_2-c_2}$
  $\iff a_1b_2 + b_1c_2 + c_1a_2 = a_2b_1 + b_2c_1 + c_2a_1$
- Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ gegensinnig ähnlich $\iff \frac{a_1-b_1}{a_1-c_1} = \frac{\overline{a_2}-\overline{b_2}}{\overline{a_2}-\overline{c_2}}$
- $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle B_2A_2C_2 \iff \frac{\frac{a_1-b_1}{a_1-c_1}}{\frac{a_2-b_2}{a_2-c_2}} \in \mathbb{R} \iff \frac{\frac{a_1-b_1}{a_1-c_1}}{\frac{a_2-b_2}{a_2-c_2}} = \frac{\frac{\overline{a_1}-\overline{b_1}}{\overline{a_1}-\overline{c_1}}}{\frac{\overline{a_2}-\overline{b_2}}{\overline{a_2}-\overline{c_2}}}$
- Q Spiegelpunkt von P an $\overline{AB}$: $\frac{q-a}{a-b} = \frac{\overline{p}-\overline{a}}{\overline{a}-\overline{b}}$
- Lotfußpunkt R von P auf Gerade$\overline{AB}$: $r = \frac{p+q}{2}$
- A,B,C,D auf (allgemeinem) Kreis: $\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)} = \frac{(\overline{a}-\overline{c})(\overline{b}-\overline{d})}{(\overline{a}-\overline{d})(\overline{b}-\overline{c})}$
- P liegt auf Kreis um M mit Radius r: $|p-m|^2 = r^2 \iff p\overline{p} - p\overline{m} - m\overline{p} = r^2 - m\overline{m}$

Spezialfall: Punkte liegen auf Einheitskreis:

a,b liegen auf Einheitskreis (d. h. $|a| = |b| = 1$)

- $\overline{a} = \frac{1}{a}$
- p,a,b auf einer Geraden: $p = a + b - ab\overline{p}$
- P auf der Tangente an Einheitskreis an A: $a = b \Longrightarrow p = 2a - a^2\overline{p}$
- Q Spiegelpunkt von P an $\overline{AB}$: $q = a + b - ab\overline{p}$
- Lotfußpunkt R von P auf Gerade $\overline{AB}$: $r = \frac{p+q}{2} = \frac{a+b+p-ab\overline{p}}{2}$
- Schnittpunkt der Tangenten an A und B: $p = \frac{2}{\overline{a}+\overline{b}}$

Punkte im Dreieck bei spezieller Lage des Dreiecks

Umkreis als Einheitskreis ($|a| = |b| = |c| = 1$):

- Umkreismittelpunkt $o = 0$
- Schwerpunkt $s = \frac{a+b+c}{3}$
- Höhenschnittpunkt $h = a + b + c$
- Feuerbachkreismittelpunkt $f = \frac{a+b+c}{2}$
- Höhenfußpunkte $h_c = \frac{1}{2}(a + b + c - ab\overline{c})$