MatBoj — Wochenendseminar der LSGM, Oktober 2005

Aufgabe 1 (Fakultät und Potenz) Bestimme alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die gilt

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n! \geq n^{\frac{n}{2}}.$$

Aufgabe 2 (Summenformel) Für $n \in \mathbb{N}$ sei s_n die Summe

$$s_n = 2 + 7 + 14 + 23 + \cdots + (n^2 + 2n - 1).$$

Finde eine explizite Formel für s_n und beweise sie.

Aufgabe 3 (Ungleichung) Es seien x, y und z positive reelle Zahlen, für die gilt $xyz = 1$. Beweise, dass dann gilt

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geq 2\left(1 + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{z}}\right). \tag{1}$$

Aufgabe 4 (Funktionalgleichnug) Gesucht sind alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4.$$

Aufgabe 5 (Natürlich) Wie viele Tripel (x, y, z) von natürlichen Zahlen x, y, z gibt es, die die Gleichung

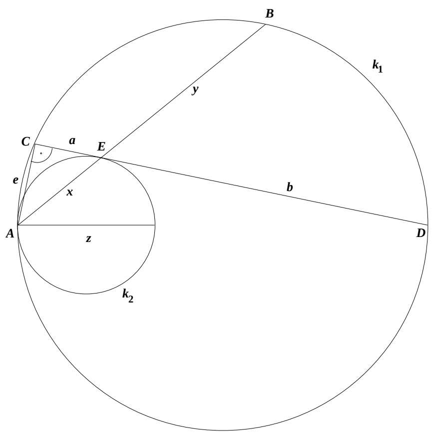
$$x + y + z + 20 = xyz$$

erfüllen.

Aufgabe 6 (Ganz gewaltig groß) Finde eine Lösung der Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ mit ganzen Zahlen a, b, c, die alle größer als 50 sind.

Aufgabe 7 (Teilerfremd) Was ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $n^2 + 1$ und $(n+1)^2 + 1$, wobei n eine natürliche Zahl ist.

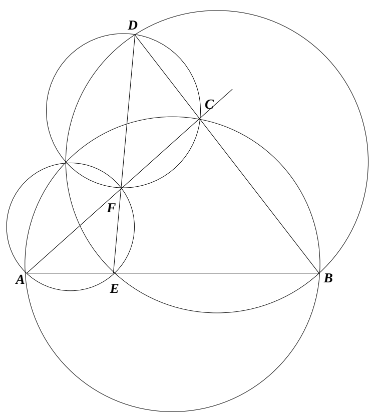
Aufgabe 8 (Teilbarkeitsspiel) Es sei m eine natürliche Zahl. Gegeben seien sechs leere nebeneinanderstehende Felder. Anna schreibt in eines dieser Felder eine der Ziffern von 0 bis 9, danach füllt Bernd ein noch nicht belegtes Feld auf dieselbe Weise usw. Bernd gewinnt, wenn die nach sechs Schritten aus den Ziffern gebildete Zahl durch m teilbar ist, ansonsten gewinnt Anna.
Für welche natürlichen Zahlen m hat Anna, für welche hat Bernd eine Gewinnstrategie?



Aufgabe 9 (Zwei Kreise) Gegeben sei ein Kreis k_1 mit den Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, die sich im Punkte E schneiden. Ferner sei k_2 ein weiterer Kreis, der k_1 von innen berührt und durch E geht. Es ist bekannt, dass

(a) $\angle ACD = 90°$.
(b) $e = \left|\overline{AC}\right| = 6$, $a = \left|\overline{CE}\right| = 2\sqrt{6}$, $b = \left|\overline{ED}\right| = 10\sqrt{6}$.

Berechne die Längen der Strecken $x = \left|\overline{AE}\right|$, $y = \left|\overline{EB}\right|$ und den Durchmesser z von k_2.
Ermittle, ob die Gerade CD den Kreis k_2 berührt oder schneidet.



Aufgabe 10 (Vier Kreise) Gegeben sei die nebenstehende Figur.
Beweise, dass die vier Umkreise der Dreiecke ABC, BDE, AEF und FCD durch einen gemeinsamen Punkt P verlaufen.

Aufgabe 11 (Gitter im Kreis) Für welche natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen Kreis, der genau n Gitterpunkte enthält?
Hinweis. Als Gitterpunkt bezeichnet man ein Element der Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$. Dabei ist die Ebene identifiziert mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 12 (Bernoulli) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_i > -1$, $a_i a_j \geq 0$, $i,j = 1,\ldots,n$. Beweise, dass dann gilt

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Wann gilt Gleichheit?