Hausaufgabenserie für Klasse 9/10
zur Qualifikation für die Teilnahme
an der 3. Stufe der 63. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) in diesem Schuljahr maximal 22 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Wir schicken wir Ihnen heute diese Hausaufgabenserie zu. Für jede Aufgabe können 6 Punkte, zusammen also 30 Punkte erreicht werden. Ihre Lösungen senden Sie bitte **bis zum 10. 1. 2024** auf dem Postweg (bevorzugte Variante) an

Dr. Axel Schüler, Hauptmannstraße 3, 04109 Leipzig.

Alternativ senden Sie pdf-Dateien, kleiner als 12MB, an `schueler@math.uni-leipzig.de`.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge 1. Es sei k_1 der Kreis um A mit Radius 1 und k_2 der Kreis, der die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ sowie den Kreis k_1 von innen berührt. Ferner sei E der Berührungspunkt der Tangente von C an k_2, welche die Seite $\overline{AB}$ (im Inneren) schneidet.

Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\angle ECB$.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Ermitteln Sie alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, die die folgenden drei Gleichungen erfüllen:

$$2(a-b) = ab, \quad 2(b-c) = bc, \quad 2(c-a) = ac.$$

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Beweisen Sie, dass $p^6 - 1$ für jede Primzahl $p \geq 5$ durch 72 teilbar ist.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Bernd hat in seiner Sparbüchse Ein- und Zwei-Euro-Münzen (und keine anderen). Wenn er zwei davon zufällig herausnimmt, so hat er mit genau 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit exakt drei Euro herausgenommen. Von einer früheren Zählung her weiß er noch, dass er mindestens 170 Münzen in der Sparbüchse hat. Kann er mit dem Geld in der Sparbüchse seinen großen Wunsch, einen Computer für 289 Euro, kaufen?

Aufgabe 5: (6 Punkte)

In der Ebene seien $2n + 2$ $(n \geq 1, n \in \mathbb{N})$ verschiedene Punkte gegeben, wobei keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Zeigen Sie, dass es eine Gerade durch zwei dieser Punkte gibt mit der Eigenschaft, dass von den übrigen $2n$ Punkten genau n auf der einen Seite und n auf der anderen Seite der Geraden liegen.