Hausaufgabenserie für Klasse 11/12 zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 63. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) in diesem Schuljahr maximal 22 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Wir schicken wir Ihnen heute diese Hausaufgabenserie zu. Für jede Aufgabe können 6 Punkte, zusammen also 30 Punkte erreicht werden. Ihre Lösungen senden Sie bitte **bis zum 10. 1. 2024** auf dem Postweg (bevorzugte Variante) an

Christoph Schulze, Kurt-Frölich-Straße 7, 01219 Dresden.

Alternativ senden Sie pdf-Dateien, nicht größer als 12MB an schulze.christoph@t-online.de.

Die Aufgaben

> Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Man bestimme alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z), welche das folgende Gleichungssystem lösen

$$x + y - z = -1, \qquad x^2 - y^2 + z^2 = 1, \qquad -x^3 + y^3 + z^3 = -1.$$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Durch die Punkte A und B verlaufen jeweils die drei Kreise k, ω und Γ. Zudem gehe durch A eine Sekante g. Diese schneide k zusätzlich im Punkt P, ω im Punkt Q sowie Γ im Punkt R.

Man zeige, dass das Verhältnis $\frac{|PQ|}{|QR|}$ nicht von der Wahl von g abhängt.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Für jede positive ganze Zahl n sei a_n definiert durch

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt[3]{n^3 + n^2 - n - 1}.$$

Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl k mit $a_2{\cdot}a_3 \cdots a_k > 4$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Vom Polynom

$$p(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, x + a_n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sei bekannt, dass für fünf verschiedene ganzzahlige x der Wert $p(x) = 6$ angenommen wird.

Man beweise, dass dann $p(z) \neq 12$ für alle ganzen Zahlen z gilt.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Jasmin und Knut spielen folgendes Spiel: Sie sagen abwechselnd Zahlen zwischen 1 und 2022, wobei Jasmin beginnt und keine Zahl mehrfach genannt werden darf. Am Ende des Spiels, wenn jede Zahl einmal genannt wurde, summieren sie die Zahlen von Jasmin. Ist das Ergebnis durch 3 teilbar, so gewinnt sie. Im anderen Fall gewinnt Knut.

Wer kann bei optimaler Spielweise gewinnen?