Hausaufgabenserie für Klasse 11/12
zur Qualifikation für die Teilnahme
an der 3. Stufe der 62. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) maximal 22 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 21. 1. 2023** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Es können 30 Punkte erreicht werden. Lösungen können Sie **bis zum 11. 1. 2023** an

Dr. C. Schulze, Kurt-Frölich-Straße 7, 01219 Dresden

schicken. Alternativ senden Sie pdf-Dateien, nicht größer als 12MB an `schulze.christoph@t-online.de`

Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars mit Musterlösungen versehen zurückgegeben.

Die Aufgaben

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Wir färben die nicht-negativen ganzen Zahlen mit den Farben rot und blau derart, dass sich unter einer beliebigen Teilmenge aufeinanderfolgender Zahlen die Anzahlen der roten und blauen Zahlen um höchstens 2023 unterscheiden.

Man beweise, dass es eine Teilmenge von 2022 aufeinanderfolgenden Zahlen gibt, welche gleiche viele rote und blaue Zahlen enthält.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Man bestimme die Menge der Tripel (x, y, z) positiver reeller Zahlen, welche das folgende Gleichungssystem erfüllen

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= xyz. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Seien a und b positive ganze Zahlen, welche die folgende Gleichung erfüllen

$$\left\lfloor \sqrt{a \cdot b} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{a} \rfloor \cdot \left\lfloor \sqrt{b} \right\rfloor.$$

Weise nach, dass a oder b eine Quadratzahl ist.

Hinweis: Für eine reelle Zahl x ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Aufgabe 4: (7 Punkte)

Man bestimme die größte Zahl n, sodass das folgende Gleichungssystem mit ganzen Zahlen $c, a_1, \ldots, a_n$ lösbar ist

$$(c+1)^2 + a_1^2 = (c+2)^2 + a_2^2 = \cdots = (c+n)^2 + a_n^2.$$

Aufgabe 5: (7 Punkte)

Wir betrachten ein Trapez $ABCD$, welches $\overline{AB}$ mit Mittelpunkt M als längere Grundseite habe. Weiter besitze $ABCD$ einen Inkreis mit Mittelpunkt O, der die kürzere Grundseite $\overline{CD}$ in einem Punkt E berühre. Die Gerade MO schneide $\overline{CD}$ in einem Punkt F.

Man beweise, dass $|DE| = |CF|$ genau dann eintritt, wenn $|AB| = 2 \cdot |CD|$.