Hausaufgabenklausur für Klasse 11/12 zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 60. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) in diesem Schuljahr maximal 11 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf der Basis Ihrer Lösungen dieser Hausaufgabenserie. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Wir schicken wir Ihnen heute diese Hausaufgabenserie zu. Bei den fünf Aufgaben können 24 Punkte erreicht werden. Ihre Lösungen senden Sie bitte (bevorzugte Variante) **bis zum 31. 1. 2021** als pdf-Datei (nicht größer als 12MB, notfalls mehrere) auf dem E-Mail-Weg an Herrn Christoph Schulze

lsgm@math.uni-leipzig.de

Alternativ senden Sie bitte Ihre Lösungen mit der normalen Post an Dr. Axel Schüler, Hauptmannstraße 3, 04109 Leipzig.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Seien a und b positive ganze Zahlen derart, dass $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ eine ganze Zahl ist. Zeige, dass $\frac{a^2}{b}$ eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Man bestimme alle Tripel (x, y, z) mit positiven reellen Zahlen x, y, z, welche das folgende Gleichungssystem lösen:

$$x \cdot (6 - y) = 9,$$
$$y \cdot (6 - z) = 9,$$
$$z \cdot (6 - x) = 9.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Wir betrachten einen Kreis k und einen Punkt P in der Ebene, wobei P nicht der Mittelpunkt von k sei. Man zeige, dass die Mittelpunkte aller Sehnen von k, deren zugehörige Sekante durch P geht, auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Man bestimme alle Paare (a, b) ganzer Zahlen, welche die Gleichung $4a^4 - 4a^3 + 1 = (2b-1)^2$ erfüllen.

Aufgabe 5: (7 Punkte)

Tobias hat vor sich ein sehr großes Blatt Kästchenpapier liegen, wobei die quadratischen Kästchen wie üblich eine Seitenlänge von $5\,mm$ haben. Er möchte auf den vorgezeichneten Linien ein Quadrat der Größe von 2021×2021 Kästchen ohne den Stift abzusetzen nachzeichnen, wobei auch die vorgezeichneten Linien innerhalb des Quadrats nachgezeichnet werden sollen. Er setzt dazu den Stift zu Beginn an einer Kästchenecke an, zeichnet sukzessive vollständige Kanten von Kästchen der Figur nach (d.h. er dreht nie inmitten einer Kästchenkante um) und setzt am Ende den Stift wieder an einer Kästchenecke ab. Welche Strecke legt der Stift mindestens zurück? Finde einen Weg minimaler Länge!