Aufgabenserie für Klasse 11/12 zum Auswahlseminar des BOK Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 59. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler steht für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) eine beschränkte Anzahl von Plätzen zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie einer Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 25.01.2019** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf das Seminar schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Lösungen können Sie **bis zum 13.01.2019** an

Samuel Borodi
Gärtnerstraße 181, Zimmer 804
04209 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Gegeben sei eine Länge a sowie ein Winkel ϕ mit dem Scheitelpunkt S und $0^\circ < \phi < 180^\circ$. Der Punkt A bewegt sich auf einem Schenkel des Winkels ϕ und der Punkt B auf dem anderen derart, dass stets $|AS| + |SB| = a$ gilt.

Man beweise, dass alle Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{AB}$ durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen.

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Man bestimme die kleinste Primzahl p, die sich nicht in der Form $\left|2^a - 3^b\right|$ mit nichtnegativen ganzen Zahlen a und b darstellen lässt.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Durch die Punkte A und B verlaufen jeweils die drei Kreise k, ω und Γ. Zudem gehe durch A eine Sekante g. Diese schneide k zusätzlich im Punkt P, ω im Punkt Q sowie Γ im Punkt R. Man zeige, dass das Verhältnis $\dfrac{|PQ|}{|QR|}$ nicht von der Wahl von g abhängt.

Aufgabe 4: (7 Punkte)

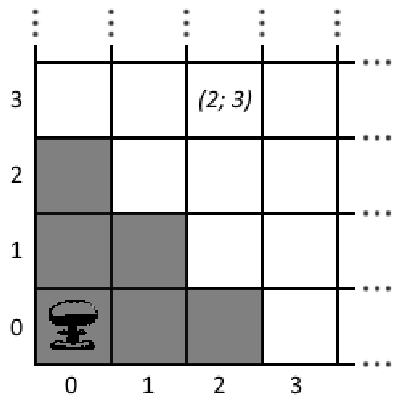
Man ermittle alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x(1-y) = y^2 - 3 \\ y(1-x) = x^2 + 1 \end{cases}$$

erfüllen.

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Tief in den Weiten Sibiriens befindet sich ein endloser Wald, der sich über den 1. Quadranten eines kartesischen Koordinatensystems erstreckt. Der Wald ist in quadratische Parzellen eingeteilt, die entsprechend dem Koordinatensystem in der Form $(a; b)$ mit nichtnegativen ganzen Zahlen a, b bezeichnet sind. In der Abbildung ist z. B. $(2; 3)$ gekennzeichnet.



Nach einem kleinen Missgeschick im nahegelegenen Kernkraftwerk taucht in $(0; 0)$ plötzlich eine neue Spezies auf: Der *Atompilz*. Sein interessanter Geschmack bleibt den Gesundheitsbehörden nicht verborgen, und es werden sogleich Anstrengungen unternommen, den Wald von den kontaminierten Pilzen zu befreien. Dies wird aber durch das Ausbreitungsverhalten der widerspenstigen Gewächse erschwert. Werden nämlich in einem beliebigen Waldstück $(a; b)$ alle Pilze gepflückt, so tritt einer der folgenden Fälle auf:

- Sind die benachbarten Waldstücke $(a + 1; b)$ und $(a; b + 1)$ beide frei von *Atompilzen*, so sind diese zwar aus $(a; b)$ verschwunden, tauchen aber in $(a + 1; b)$ und $(a; b + 1)$ auf.
- Gibt es in $(a + 1; b)$ oder $(a; b + 1)$ jedoch bereits *Atompilze*, so wachsen auch in $(a; b)$ alle gepflückten Pilze wieder nach.

Man beweise, dass der grau markierte Bereich des Waldes trotz aller Bemühungen niemals vollständig frei von *Atompilzen* sein wird.