Aufgabenserie für Klasse 9/10
zum Auswahlseminar des BK Leipzig
zur Qualifikation für die Teilnahme
an der 3. Stufe der 58. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) maximal 22 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 26. 1. 2019** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Es können 40 Punkte erreicht werden. Lösungen können Sie **bis zum 18. 1. 2019** an

Dr. A. Schüler, Hauptmannstraße 3, 04109 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars mit Musterlösungen versehen zurückgegeben.

Die Aufgaben

> Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Über den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC seien ähnliche gleichschenklige Dreiecke APB (mit $|AP| = |BP|$), AQC (mit $|AQ| = |CQ|$) und BRC (mit $|BR| = |CR|$) so gezeichnet, dass die ersten beiden außerhalb des Dreiecks ABC liegen und das dritte in der gleichen durch BC begrenzten Halbebene wie das Dreieck ABC liegt.

Beweisen Sie, dass das Viereck $APRQ$ stets ein Parallelogramm ist oder die vier Punkte A, P, R, Q auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen (a, b, c) der Gleichung

$$2a^2 + b^2 = 5c^2.$$

Aufgabe 3: (9 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass man unter neun aufeinanderfolgenden, rot bzw. blau gefärbten natürlichen Zahlen stets 3 gleichfarbige finden kann, die eine arithmetische Folge bilden.

b) Untersuchen Sie, ob die Aussage auch für acht aufeinanderfolgende natürliche Zahlen richtig ist.

Hinweis: Drei Zahlen a, b und c bilden eine arithmetische Folge, wenn es eine Zahl d gibt, so dass $b - a = c - b = d$ gilt.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Im Inneren eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit dem rechten Winkel bei C sei ein Punkt M derart gegeben, dass die Dreiecke ABM, BCM und CAM flächengleich sind.

Zeigen Sie, dass dann $5\,|MC|^2 = |MA|^2 + |MB|^2$ gilt.

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungspaare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der Ungleichung

$$2\,x^2 + 3\,y^2 \leq 5\,x\,y\,.$$