Aufgabenserie für Klasse 11/12 zum Auswahlseminar des BOK Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 54. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler steht für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) eine beschränkte Anzahl von Plätzen zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie einer Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 17. 1. 2015** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf das Seminar schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Lösungen können Sie **bis zum 10. 1. 2015** an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Ein konvexer Körper wird ausschließlich von Fünfecken und Sechsecken als Seitenflächen begrenzt, wobei in jeder Ecke genau drei Seitenflächen zusammenstoßen. Jedes Fünfeck hat fünf Sechsecke als Nachbarn, jedes Sechseck drei Fünfecke.

Bestimmen Sie die Anzahl der Ecken, Kanten und Seitenflächen jeder der beiden Arten für diesen Körper.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Finden Sie alle Lösungen $(x; y)$ der Gleichung $2^x = 3^y + 5$ über den natürlichen Zahlen.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 3$. Finden Sie alle Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ positiver reeller Zahlen, die gemeinsame Lösung der folgenden Gleichungen sind:

$$2 \cdot \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \frac{1}{x_3} = x_1,\ 2 \cdot \sqrt{\frac{x_2}{x_3}} - \frac{1}{x_4} = x_2,\ 2 \cdot \sqrt{\frac{x_3}{x_4}} - \frac{1}{x_5} = x_3,\ \ldots$$
$$2 \cdot \sqrt{\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}} - \frac{1}{x_n} = x_{n-2},\ 2 \cdot \sqrt{\frac{x_{n-1}}{x_n}} - \frac{1}{x_1} = x_{n-1},\ 2 \cdot \sqrt{\frac{x_n}{x_1}} - \frac{1}{x_2} = x_n$$

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC.

Bestimmen Sie den geometrischen Ort aller Punkte X der Ebene, für welche

$$|AX| + |BX| = |CX|$$

gilt.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Wir betrachten die Menge aller dreiseitigen Pyramiden $ABCD$ vorgegebenen Volumens V, bei denen die D enthaltenden Seitenflächen rechtwinklig in D sind.

Untersuchen Sie, ob es unter diesen dreiseitigen Pyramiden eine mit kleinster Kantensumme u gibt und bestimmen Sie u gegebenenfalls in Abhängigkeit von V.

Aufgabe 6: (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n > 1$

$$(n+1)\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) - n\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) > 1$$

gilt.

Aufgabe 7: (10 Punkte)

Die Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist gegeben durch die Anfangsbedingungen $a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{3}$ und die Rekursionsbeziehung

$$a_n = \frac{2}{3}\,a_{n-1} - a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2\,.$$

Zeigen Sie, dass es außer a_0 ein weiteres Folgenglied a_n mit $a_n > 0{,}99999$ gibt.