Aufgabenserie für Klasse 9/10 des BOK Leipzig zur Vorbereitung auf die Teilnahme an der 3. Stufe der 50. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Sie haben sich für die dritte Stufe der 50. Mathematikolympiade qualifiziert. Leider können wir in diesem Schuljahr aus finanziellen Gründen kein Auswahlseminar anbieten. Es besteht jedoch die Möglichkeit, vom 19. bis 24. 2. 2011 an der LSGM-Winterschule in Grimma teilzunehmen, um sich intensiver auf die Landesrunde vorzubereiten. Dazu liegt diesem Schreiben eine Einladung bei.

Außerdem haben wir einige Aufgaben zur Vorbereitung auf die Landesrunde zusammengestellt. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Sie können Ihre Lösungen **bis zum 20. 1. 2011** an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

schicken. Wir korrigieren diese und schicken sie zusammen mit Musterlösungen zurück.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen n mit der folgenden Eigenschaft gibt: Sowohl die Quersumme von n als auch die Quersumme des unmittelbaren Nachfolgers $(n+1)$ sind durch 11 teilbar.

Wenn es solche Zahlen gibt, so ist die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft anzugeben.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Im Inneren eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit dem rechten Winkel bei C sei ein Punkt M derart gegeben, dass die Dreiecke ABM, BCM und CAM flächengleich sind.
Zeigen Sie, dass dann $5\,|MC|^2 = |MA|^2 + |MB|^2$ gilt.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Finden Sie alle reellen Lösungstripel $(x; y; z)$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2\,x\,y + y\,z &= 27\,, \\ 3\,y\,z - 2\,x\,z &= 25\,, \\ x\,z - x\,y &= 4\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen n, für welche der Bruch $\dfrac{19\,n+17}{7\,n+11}$ eine ganze Zahl ist.

b) Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen n, für welche sich der Bruch $\dfrac{19\,n+17}{7\,n+11}$ nicht weiter kürzen lässt.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für ganze Zahlen $n > 1$ stets $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ gilt.

b) Es sei S die Summe aller Kehrwerte der Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis 2011. Beweisen Sie, dass $S < 2$ gilt.