Aufgabenserie für Klasse 9/10 zum Auswahlseminar des BOK Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 49. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) maximal 30 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 23. 1. 2010** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie **bis zum 10. 1. 2010** an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

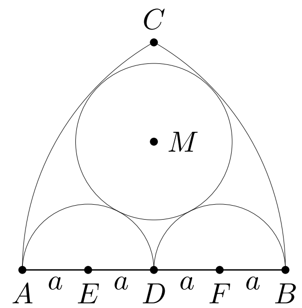
schicken. Die Lösungen werden korrigiert und die Aufgaben während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Bestimmen Sie alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die durch 11 geteilt eine natürliche Zahl ergeben, die gleich der Summe der Quadrate der Ziffern der ursprünglichen Zahl ist.

Aufgabe 2: (5 Punkte)



Im nebenstehenden Bild mögen sich die Kreise um A bzw. um B mit dem Radius $|AB| = 4\,a$ im Punkt C schneiden. Es sei D der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und k_3 und k_4 die Halbkreise über den Durchmessern $\overline{AD}$ bzw. $\overline{DB}$, die in derselben Halbebene liegen wie C. Schließlich sei k_5 der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, der k_1 und k_2 von innnen und k_3 und k_4 von außen berührt.

Berechnen Sie r in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, $n \geq 1$.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von n alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|1+x|^n + |1-x|^n \leq 2^n .$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Ermitteln Sie alle nichtnegativen reellen Lösungen $x, y, z \geq 0$ des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned}(x+y)(y+z) &= 4\,x\,y\\(y+z)(z+x) &= 4\,y\,z\\(z+x)(x+y) &= 4\,z\,x.\end{aligned}$$

Aufgabe 5: (7 Punkte)

Über den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC seien ähnliche gleichschenklige Dreiecke APB (mit $|AP| = |BP|$), AQC (mit $|AQ| = |CQ|$) und BRC (mit $|BR| = |CR|$) so gezeichnet, dass die ersten beiden außerhalb des Dreiecks ABC liegen und das dritte in der gleichen durch BC begrenzten Halbebene wie das Dreieck ABC liegt.

Beweisen Sie, dass das Viereck $APRQ$ stets ein Parallelogramm ist oder die vier Punkte A, P, R, Q auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 6: (7 Punkte)

Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungspaare $(x; y)$ der Gleichung

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y\,.$$