Aufgabenserie für Klasse 11/12 zum Auswahlseminar des BOK Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 49. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler steht für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) eine beschränkte Anzahl von Plätzen zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie einer Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 23. 1. 2010** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf das Seminar schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Lösungen können Sie **bis zum 10. 1. 2010** an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Von einer endlichen Folge $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reeller Zahlen sei bekannt, dass $a_0 = a_n = 0$ ist und dass für Indizes $k = 1, 2, \ldots, n-1$ stets gilt $a_{k-1} - 2\,a_k + a_{k+1} \geq 0$.

Man weise nach dass $a_k \leq 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$ gilt.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Von einer dreiseitigen Pyramide sei bekannt, dass die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a ist, dass die Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke mit gleichen Schenkellängen s sind und dass die Höhe h der Pyramide gleich dem arithmetischen Mittel aus a und s ist.

Man untersuche, welche Werte dabei das Verhältnis $s : a$ annehmen kann.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Ermitteln Sie alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, welche der folgenden Bedingung genügen:

Die durch $p(x) = x^3 - a\,x^2 + b\,x - c$ definierte Funktion p hat die Nullstellen $p(a) = 0$, $p(b) = 0$ und $p(c) = 0$.

Aufgabe 4: (4 (+2) Punkte)

Man bestimme alle reellen Zahlen a, für die die beiden Gleichungen $x^2 + a\,x + 1 = 0$ und $x^2 + x + a = 0$ wenigstens eine gemeinsame reelle Lösung haben.

Teilnehmer, die komplexe Zahlen und dabei insbesondere komplexe Nullstellen quadratischer Gleichungen kennen, können auch alle reellen Zahlen a bestimmen, für die die Gleichungen wenigstens eine gemeinsame komplexe Nullstelle haben (2 Zusatzpunkte).

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Vom Polynom

$$p(x) = a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,x + a_n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sei bekannt, dass für vier verschiedene ganzzahlige x der Wert $p(x) = 7$ angenommen wird.

Man beweise, dass dann für alle ganzzahliges x gilt $p(x) \neq 14$.

Aufgabe 6: (5 Punkte)

Über ein Produkt $p(x) = q(x) \cdot r(x)$ zweier Polynome $q(x)$ und $r(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten sei bekannt, dass alle Koeffizienten von $p(x)$ gerade sind, dass jedoch wenigstens einer dieser Koeffizienten nicht durch vier teilbar ist.

Man beweise, dass dann einer der Faktoren $q(x)$, $r(x)$ nur gerade Koeffizienten hat, während der andere Faktor wenigstens einen ungeraden Koeffizienten hat.

Aufgabe 7: (8 Punkte)

Man bestimme alle Polynome der Gestalt $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$ mit paarweise verschiedenen und von Null verschiedenen ganzen Zahlen a, b und c, die sich als Produkt von zwei anderen Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten schreiben lassen.

Aufgabe 8: (9 Punkte)

Den Eckpunkten eines regelmäßigen Fünfecks ist je eine ganze Zahl so zugeordnet dass die Summe dieser fünf Zahlen positiv ist. Sind X, Y und Z drei aufeinanderfolgende Eckpunkte und x, y und z die ihnen zugeordneten Zahlen, wobei $y < 0$ ist, so ist folgende Operation erlaubt: Die Zahlen x, y und z werden in dieser Reihenfolge durch $x+y$, $-y$ und $z+y$ ersetzt. Diese Operation wird so oft wiederholt, wie sich ein $y < 0$ findet.

Man entscheide, ob man dabei stets nach endlich vielen Schritten abbrechen muss.