Aufgabenserie für Klasse 9/10
zum Auswahlseminar des BOK Leipzig
zur Qualifikation für die Teilnahme
an der 3. Stufe der 48. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) maximal 30 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 24. 1. 2009** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie **bis zum 10. 1. 2009** an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und die Aufgaben während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Die Folge a_n ist bestimmt durch $a_1 = 1340$ und $a_{2n+1} = a_{2n} = n - a_n$ für ganze Zahlen $n > 0$.

Bestimmen Sie den Wert von a_{2009}.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C gelte für die Seitenlängen (mit den üblichen Bezeichnungen) $c = 3\,\text{cm}$ und $a + b = \sqrt{17}\,\text{cm}$.

Bestimmen Sie daraus den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungspaare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der Ungleichung

$$2\,x^2 + 3\,y^2 \leq 5\,x\,y\,.$$

Aufgabe 4: (7 Punkte)

Beweisen Sie, dass für beliebige nichtnegative reelle Zahlen a, b stets die Ungleichung

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{a\,b}$$

gilt.

Aufgabe 5: (7 Punkte)

Die Winkelhalbierenden AI und BI des Dreiecks ABC gehen durch den Inkreismittelpunkt I und schneiden die Gegenseiten in den Punkten A_1 und B_1. Weiter sei $|IA_1| = |IB_1|$.

Untersuchen Sie, ob daraus folgt, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

Aufgabe 6: (7 Punkte)

Finden Sie alle reellen Lösungstripel $(x; y; z)$ des Gleichungssystems

$$\frac{x\,y}{x+y} = 1 - z$$
$$\frac{y\,z}{y+z} = 2 - x$$
$$\frac{z\,x}{z+x} = 2 - y$$