Aufgabenserie für Klasse 9/10 zum Auswahlseminar des BOK Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 47. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem BOK Leipzig stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) nur 30 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 19. 1. 2008** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie **bis zum 5. 1. 2008** an

Prof. Dr. K.-D. Kürsten, Am Gutspark 16, 04316 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Aufgabe 1: (6 Punkte)
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen a, b, c mit $a \cdot b \cdot c \neq 0$ gilt:

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \tag{1}$$

Unter welchen Bedingungen gilt die Formel (1) mit dem Gleichheitszeichen?

Aufgabe 2: (7 Punkte)
ABC sei ein Dreieck und D sei der Schnittpunkt der Innenwinkelhalbierenden durch A mit der Seite $\overline{BC}$. Ferner seien folgende Bezeichnungen für die Streckenlängen gewählt:

$$\left|\overline{AB}\right| = c,\ \left|\overline{AC}\right| = b,\ \left|\overline{AD}\right| = w,\ \left|\overline{BD}\right| = v,\ \left|\overline{CD}\right| = u.$$

Beweisen Sie, dass dann $w^2 = b \cdot c - u \cdot v$ gilt.

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Es sei S die Summe aller Kehrwerte der Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis 2007. Beweisen Sie, dass gilt

$$S < 2.$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Gegeben sei ein Kreis k mit dem Durchmesser $\overline{AB}$. Eine zu $\overline{AB}$ senkrechte Gerade schneidet $\overline{AB}$ in P und den Kreis k in C und D. Die Umfänge der Dreiecke APC und BPD verhalten sich zueinander wie $2 : 1$. Wie groß ist unter diesen Voraussetzungen das Verhältnis der Streckenlängen $|\overline{AP}| : |\overline{PB}|$?

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Es seien x, y, z paarweise verschiedene ganze Zahlen. Man zeige, dass

$$(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$$

durch

$$5 \cdot (x-y) \cdot (y-z) \cdot (z-x)$$

teilbar ist.

Aufgabe 6: (8 Punkte)

a) Man weise nach, dass für jede positive ganze Zahl n gilt

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

b) Man bestimme die größte ganze Zahl, die kleiner als

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$$

ist. (Addiert werden die Kehrwerte der Quadratwurzeln aus allen positiven ganzen Zahlen, die $\leq 1\,000\,000$ sind.)