Aufgabenserie für Klasse 9/10
zum Auswahlwettbewerb im RSA-Bereich Leipzig
zur Qualifikation für die Teilnahme
an der 3. Stufe der 46. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Regionalschulamtsbereich Leipzig stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) nur 30 Plätze zur Verfügung. Bisher wurden unsere Teilnehmer ausschließlich an Hand der Ergebnisse der zweiten Runde der MO ausgewählt.

Um noch deutlicher die besten Kandidaten auszuwählen und weiter zu qualifizieren sowie die Vergleichbarkeit und Transparenz des Auswahlverfahrens zu erhöhen hat das Bezirksolympiadekomitee beschlossen, beginnend mit der 44. Olympiade zusätzlich die Ergebnisse einer Auswahlklausur heranzuziehen. Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für die Auswahlklausur qualifiziert. Die Klausur wird während des Auswahlseminars am 20. 1. 2007 geschrieben.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie **bis zum 7. 1. 2007** an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Ergebnisse der Klausur bilden zusammen mit den Ergebnissen der zweiten Stufe die Grundlage für die Entscheidung, wer die Region Leipzig bei der dritten Stufe vertreten wird. Unter vergleichbar erfolgreichen Teilnehmern werden zusätzlich die Ergebnisse der Hausaufgabenserie sowie die Beteiligung an weiteren Angeboten der Talenteförderung, etwa dem Korrespondenzseminar der LSGM, herangezogen.

Die Aufgaben

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die durch 11 geteilt eine natürliche Zahl ergeben, die gleich der Summe der Quadrate der Ziffern der ursprünglichen Zahl ist.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Für welche reellen Zahlen x gilt die Ungleichung

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9?$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus den gegebenen Stücken h_a, h_b und s_a. Dabei sind h_a und h_b die Längen der Höhen durch A bzw. B und s_a ist die Länge der Seitenhalbierenden durch A.
Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion auf Existenz und Eindeutigkeit.

Aufgabe 4: (7 Punkte)

Auf einer Kreislinie k seien drei verschiedene Punkte A, B und C gegeben.
Konstruieren Sie auf k einen weiteren Punkt D, sodass $ABCD$ ein **Tangentenviereck** ist.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Die Folge (a_n) ist bestimmt durch $a_1 = 1337$ und $a_{2n+1} = a_{2n} = n - a_n$ für ganze Zahlen $n > 0$.
Bestimmen Sie den Wert von a_{2007}.

Aufgabe 6: (5 Punkte)

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{15}$, sodass

$$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{15}^4 = 1599.$$