Aufgabenserie für Klasse 11/12 zum Auswahlwettbewerb im RSA-Bereich Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 46. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Regionalschulamtsbereich Leipzig stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) nur 30 Plätze zur Verfügung. Bisher wurden unsere Teilnehmer ausschließlich an Hand der Ergebnisse der zweiten Runde der MO ausgewählt.

Um noch deutlicher die besten Kandidaten auszuwählen und weiter zu qualifizieren sowie die Vergleichbarkeit und Transparenz des Auswahlverfahrens zu erhöhen hat das Bezirksolympiadekomitee beschlossen, beginnend mit der 44. Olympiade zusätzlich die Ergebnisse einer Auswahlklausur heranzuziehen. Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für die Auswahlklausur qualifiziert. Die Klausur wird während des Auswahlseminars am 20. 1. 2007 geschrieben.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie **bis zum 7. 1. 2007** an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Ergebnisse der Klausur bilden zusammen mit den Ergebnissen der zweiten Stufe die Grundlage für die Entscheidung, wer die Region Leipzig bei der dritten Stufe vertreten wird. Unter vergleichbar erfolgreichen Teilnehmern werden zusätzlich die Ergebnisse der Hausaufgabenserie sowie die Beteiligung an weiteren Angeboten der Talenteförderung, etwa dem Korrespondenzseminar der LSGM, herangezogen.

Die Aufgaben

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Im spitzwinkligen Dreieck ABC sind die Höhe CC', die Seitenhalbierende BB' und die Winkelhalbierende AA' alle gleichlang, wobei A', B' bzw. C' den Schnittpunkt der Dreieckstransversalen durch den jeweiligen Eckpunkt mit der gegenüberliegenden Seite bezeichnet.

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Bestimmen Sie alle Paare ganzer Zahlen $(x; y)$, für welche die Gleichung

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$$

erfüllt ist.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Finden Sie alle reellen Lösungstripel $(x; y; z)$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2\,x\,y + y\,z &= 27\,, \\ 3\,y\,z - 2\,x\,z &= 25\,, \\ x\,z - x\,y &= 4\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Im Inneren eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit dem rechten Winkel bei C sei ein Punkt M derart gegeben, dass die Dreiecke ABM, BCM und CAM flächengleich sind.

Zeigen Sie, dass dann $5\,|MC|^2 = |MA|^2 + |MB|^2$ gilt.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung

$$\sqrt{\underbrace{111\ldots11}_{2\,n} - \underbrace{222\ldots22}_{n}} = \underbrace{333\ldots33}_{n}$$

für natürliche Zahlen $n > 0$, wobei die Zahl unter der geschweiften Klammer jeweils die Anzahl der Ziffern der jeweiligen Zahl über der Klammer angibt.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Finden Sie alle ganzen Zahlen n, für welche der Bruch $\dfrac{19\,n + 17}{7\,n + 11}$ eine ganze Zahl ist.