

Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats November 2017:

a) Deckt Sonia direkt ein Paar auf, wird sie auch das zweite Paar aufdecken. Deckt sie kein Paar auf, kann Barbara eine der noch nicht aufgedeckten Karten aufdecken. Diese muss zu einer der beiden von Sonia aufgedeckten Karten gehören und Barbara kann das Paar nehmen und auch die verbliebenen beiden Karten aufdecken. Es reicht also zu wissen, in wie vielen Fällen Sonia direkt ein Paar aufdeckt. Hat sie bereits eine Karte aufgedeckt, so verbleibt genau eine von drei passenden Karten. Sie wird also in einem Drittel möglichen Fällen gewinnen und sonst verlieren.

b) Deckt Sonia direkt ein Paar auf, bleiben nur vier Karten übrig und es kann wie in a) weiter argumentiert werden. Die Chance, direkt ein Paar aufzudecken ist aber nur noch ein Fünftel, weil nach dem Aufdecken einer Karte vier unpassende und eine passende übrig bleiben. Insgesamt gibt es sechs Möglichkeiten, direkt ein Paar aufzudecken (jedes der drei Paare in beliebiger Reihenfolge). Danach wird sie wieder in jedem dritten Fall auch die beiden anderen Paare gewinnen, ansonsten gewinnt Barbara die beiden verbleibenden Paare und siegt 1: 2.

Deckt Sonia kein Paar auf, so deckt Barbara eine neue Karte auf. Zwei der vier möglichen Karten gehören zu einem Paar. Nehmen wir an, dass sie eine der beiden Karten aufdeckt und ein Paar gewinnt. Danach verbleiben drei unbekannte Karten. Deckt Barbara diejenige unter diesen drei Karten auf, die zur zweiten bekannten Karte gehört, gewinnt sie auch das zweite und das verbleibende Paar. Deckt sie jedoch eine andere Karte auf, muss sie nach ihrer Strategie die bereits bekannte Karte aufdecken und Sonia ist an der Reihe. Sie kennt nun aber schon zwei der vier Karten und gewinnt wie in a) das Spiel 2: 1. Insgesamt gewinnt Sonia, wenn sie zunächst kein Paar, Barbara dann aber eines aufdeckt, in zwei Dritteln der Fälle, da es auf die Wahl unter den drei unbekanntem Karten ankommt.

Deckt Sonia kein Paar auf und Barbara darauf eine weitere unbekannte Karte, so muss sie ihrer Strategie folgend eine der bereits bekannten Karten aufdecken. Nun ist Sonia an der Reihe und kennt drei der sechs Karten, die alle zu verschiedenen Paaren gehören. Egal welche der unbekanntem Karten sie aufdeckt, sie wird auf jeden Fall die passende Karte kennen und nach und nach alle drei Paare erspielen.

Insgesamt gewinnt also Sonia, in einem Drittel der Fälle, wenn sie direkt ein Paar aufdeckt ($\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$) und in der Hälfte der Fälle, wenn sie kein Paar aufdeckt (nämlich wenn Barbara danach keine neue Karte aufdeckt) ($\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$) und in zwei Dritteln der Fälle, wenn Sonia keines, aber Barbara dann ein Paar aufdeckt ($\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$). Summiert man alles auf, gewinnt Sonia in $\frac{11}{15}$ der Fälle.

c) Sonias erster Zug ändert sich nicht, da sie ohnehin keine Karten kennt. Deckt sie direkt ein Paar auf ($\frac{1}{5}$), geht es wieder weiter wie in a) (Sieg in einem Drittel der Fälle). Deckt sie kein Paar auf, kann Barbara entweder ein Paar aus einer neuen und einer alten Karte (zwei von vier), ein Paar aus zwei neuen Karten oder zwei neue unpassende Karten ($\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3}$) aufdecken.

Hat sie ein neu-altes Paar gefunden, kennt sie noch eine Karte und deckt entweder die passende auf und gewinnt alle Paare oder sie deckt zwei passende neue Karten auf und gewinnt danach auch alle Paare oder sie deckt zwei unpassende neue Karten auf ($\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2}$). Dann kennt Sonia aber drei der vier Karten und gewinnt die beiden restlichen Paare. Sonia gewinnt also in $\frac{1}{3}$ dieser Fälle.

Hat Barbara ein neues Paar gefunden, kennt sie danach noch zwei der vier Karten und gewinnt beide Paare. Hat sie aber zwei unpassende neue Karten aufgedeckt, kennt Sonia vier der sechs Karten und kann direkt ein Paar aufdecken und kennt danach immernoch die Hälfte der verbleibenden Karten, gewinnt also alle Paare. Es ergibt sich insgesamt: Sonia gewinnt sofort durch Aufdecken aller Paare $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$ oder nachdem sie und Barbara kein Paar aufgedeckt haben ($\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$) oder nachdem sie kein Paar und Barbara ein neu-altes Paar aufdeckt haben ($\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{15}$), insgesamt in $\frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$ aller Fälle.