

Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats April 2017:

a) Die Schnittpaare des Fünfeckes sind: $(3, 6), (3, 5), (3, 4), (4, 5), (4, 4)$.

b) Die Summen der oben genannten Schnittpaare sind 9, 8, 7, 9 und 8. Die Paare, deren Summe 9 ergibt entstanden durch einen Schnitt, der durch zwei Seiten, aber keine Ecke ging. Daher entstanden 4 neue Ecken, was zur Gesamtzahl $5 + 4 = 9$ führt. Die Paare, deren Summe 8 ergibt, entstanden durch einen Schnitt, der durch genau eine Ecke führte. So kamen insgesamt 3 neue Ecken (eine durch den Schnitt durch die Ecke und zwei durch den Schnitt durch die Seite) hinzu, es gibt also $5 + 3 = 8$ Ecken. Das Paar mit der Summe 7 entstand durch einen Schnitt, der durch zwei Ecken ging. Daher kamen auch nur zwei Ecken zur Gesamtzahl hinzu, $5 + 2 = 7$.

Die einzige Möglichkeit, 3 als Summe zweier natürlicher Zahlen zu schreiben ist $1 + 2$. Die Möglichkeiten für 4 sind $1 + 3$ und $2 + 2$, für 5 sind es $1 + 4$ und $2 + 3$. Zur Erklärung, warum man durch das Addieren von 2 zu jedem Summanden ein Schnittpaar des Fünfeckes erhält: Die Schnitte durch das Fünfeck gehen entweder durch keine, eine oder genau zwei Ecken. Nimmt man diese durchschnittenen Ecken aus der Zählung heraus, so bleiben dem Fünfeck 5, 4 oder 3 Ecken. Davon liegt je ein Teil auf der einen und der Rest auf der anderen Seite des Schnittes (auf jeder Seite muss auch mindestens eine Ecke liegen). Jede dieser Zerlegungen der 3, 4 und 5 beschreibt also einen Schnitt durch das Fünfeck, bei dem auf der einen Seite des Schnittes der erste Summand an Ecken und auf der anderen Seite der zweite Summand an Ecken liegen. Die beiden entstehenden Vielecke haben natürlich an der Schnittkante je zwei weitere Ecken. Daher erhält man aus jeder Zerlegung der 3, 4 und 5 durch Addition von 2 zu jedem Summanden ein Schnittpaar des Fünfeckes.

c) Auf dieselbe Art und Weise lassen sich die Schnittpaare von Sechs- und Siebeneck ermitteln. Die Zerlegungen der 4 und 5 haben wir schon berechnet. Die Zerlegungen der 6 sind $1 + 5, 2 + 4, 3 + 3$, die der 7 sind $1 + 6, 2 + 5, 3 + 4$. Zerschneidet man ein Sechseck, so liegen 4, 5 oder 6 Ecken nicht auf dem Schnitt. Die Schnittpaare sind also die um zwei erhöhten Zerlegungen von 4, 5 und 6: $(3, 5), (4, 4), (3, 6), (4, 5), (3, 7), (4, 6), (5, 5)$. Genauso sind die Schnittpaare des Siebenecks die um zwei erhöhten Zerlegungen von 5, 6 und 7: $(3, 6), (4, 5), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (3, 8), (4, 7), (5, 6)$.