Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats *März 2017*:
a) Die Teilzahlen von 2017 sind $0, 1, 2, 7, 17, 20, 21, 27, 201, 207, 217, 2017$, die von 1414 sind $1, 4, 11, 14, 41, 44, 141, 414, 1414$ und die von 7777 $7, 77, 777, 7777$.
Es gibt eine Zahl, die alle Zahlen kleiner als 100 als Teilzahlen besitzt: Zum Beispiel die Zahl 1234567891011?99100, welche durch Aneinanderhängen aller dieser Zahlen entsteht. Es gibt natürlich auch kleinere Beispiele!
Die Zahl 1 hat eine, 11 zwei, 111 drei, 1111 vier und 11111 fünf Teilzahlen.

b) Die Zahlen, die keine Teilzahl besitzen, die sich durch 10 teilen lässt, sind gerade die Zahlen, welche keine 0 als Ziffer besitzen. Ist eine Teilzahl durch 10 teilbar, so muss sie in einer 0 enden. Damit besitzt auch die Zahl selbst eine Ziffer 0. Besitzt eine Zahl die Ziffer 0, so auch die Teilzahl 0. Diese ist durch 10 teilbar.
Die Zahlen, die keine geraden Teilzahl besitzen, sind gerade die Zahlen, welche keine gerade Ziffer besitzen. Ist eine Teilzahl gerade, so muss sie in einer geraden Ziffer enden. Damit besitzt auch die Zahl selbst eine gerade Ziffer. Besitzt eine Zahl eine gerade Ziffer, so auch die Teilzahl, welche nur aus dieser Ziffer besteht. Diese ist aber gerade.
Eine Zahl, deren Teilzahlen alle nicht durch 3 teilbar sind, darf keine Teilzahl besitzen, deren Quersumme durch 3 teilbar ist. Angenommen es gäbe eine dreistellige Zahl, so dass dies gilt. Dann kann keine der Ziffern selbst durch 3 teilbar sein, sonst wäre diese Ziffer als Teilzahl bereits durch 3 teilbar. Jede der drei Ziffern hat als einen Rest ungleich 0 beim Teilen durch 3, also Rest 1 oder 2. Haben alle drei Zahlen den Rest 1 bzw. 2, so gilt für die Quersumme der gesamten Zahl, dass sie Rest $1 + 1 + 1$ bzw. $2 + 2 + 2$ beim Teilen durch 3 lässt. Dies entspricht aber jeweils dem Rest 0, also ist die gesamte Zahl durch 3 teilbar. Als muss eine der Ziffern Rest 1 und eine der anderen Rest 2 lassen. Dann lässt aber die Quersumme der Teilzahl, die durch Streichen der dritten Ziffer entsteht, beim Teilen durch 3 den Rest $1+2$, also den Rest 0. Es kann also keine dreistellige Zahl mit dieser Eigenschaft geben.

c) Die kleinste solche Zahl ist 245. Ein möglicher Lösungsweg:
Damit eine der Teilzahlen durch 5 teilbar ist, muss die Ziffer 5 in der Zahl auftauchen. Es darf die Ziffer 0 nicht auftauchen, da ansonsten eine Teilzahl existiert, die durch 10 teilbar ist. Weiterhin muss eine gerade Ziffer auftauchen, damit eine Teilzahl existiert, die durch 2 teilbar ist.
Angenommen neben 5 wäre 1 eine weitere Ziffer. Dann müsste, damit die Quersumme einer Teilzahl 9 beträgt und damit durch 9 teilbar ist, die letzte Ziffer $4, 8$ oder 9 sein. 9 ist aber keine gerade Zahl. Für die Ziffern $5, 1, 4$ gibt es aber keine Möglichkeit eine durch 8 teilbare Teilzahl zu konstruieren. Für die Ziffern $5, 1, 8$ gibt es keine Möglichkeit eine durch 7 teilbare Teilzahl zu konstruieren. Also ist die zweite Ziffer keine 1.
Angenommen neben 5 wäre 2 eine weitere Ziffer. Dann müsste, damit die Quersumme einer Teilzahl 9 beträgt und damit durch 9 teilbar ist, die letzte Ziffer $4, 7$ oder 9 sein. Die kleinste solche Zahl ist 245. Deren Teilzahl 24 ist durch $2, 3, 4, 6$ und 8 teilbar, die Teilzahl 45 durch 9 sowie die Teilzahl 245 durch 7 und 5. Damit ist 245 die gesuchte Zahl.