

Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats März 2014:

a) Wir schreiben die Glasinhalte stets in der Reihenfolge der Gläser $0,5L$, $0,7L$, $1,0L$ und $2,2L$ und geben die Glasinhalte nach jedem Umschütten an:

$0L, 0L, 0L, 2,2L \rightarrow 0,5L, 0L, 0L, 1,7L \rightarrow 0L, 0L, 0,5L, 1,7L \rightarrow 0,5L, 0L,$
 $0,5L, 1,2L \rightarrow 0L, 0,5L, 0,5L, 1,2L \rightarrow 0,5L, 0,5L, 0,5L, 0,7L$

$0L, 0L, 0L, 2,2L \rightarrow 0L, 0,7L, 0L, 1,5L \rightarrow 0,5L, 0,2L, 0L, 1,5L$

$0,5L, 0,2L, 0L, 1,5L \rightarrow 0,5L, 0L, 0,2L, 1,5L \rightarrow 0L, 0L, 0,2L, 2,0L \rightarrow 0L,$
 $0,7L, 0,2L, 1,3L \rightarrow 0,5L, 0,2L, 0,2L, 1,3L \rightarrow 0,5L, 0L, 0,4L, 1,3L$

Bei der dritten Folge von Füllhöhen haben wir dabei am Ende der zweiten Folge angefangen.

b) Wir beginnen mit dem letzten Zustand aus Aufgabenstellung a):

$0,5L, 0L, 0,4L, 1,3L \rightarrow 0L, 0L, 0,4L, 1,8L \rightarrow 0L, 0,7L, 0,4L, 1,1L \rightarrow 0,5L,$
 $0,2L, 0,4L, 1,1L \rightarrow 0L, 0,2L, 0,4L, 1,6L \rightarrow 0,4L, 0,2L, 0L, 1,6L \rightarrow 0,4L, 0L,$
 $0,2L, 1,6L \rightarrow 0,4L, 0,7L, 0,2L, 0,9L \rightarrow 0,4L, 0L, 0,9L, 0,9L$

Wir beginnen wieder mit dem letzten Zustand vom vorherigen Umgießen:

$0,4L, 0L, 0,9L, 0,9L \rightarrow 0L, 0,4L, 0,9L, 0,9L \rightarrow 0,5L, 0,4L, 0,4L, 0,9L \rightarrow 0L,$
 $0,4L, 0,4L, 1,4L \rightarrow 0,4L, 0,4L, 0L, 1,4L \rightarrow 0,4L, 0,4L, 1,0L, 0,4L$

c) Wie in der Aufgabenstellung bemerkt, kann in jedem Glas nur ein Vielfaches von $0,1L$ sein. Entsprechend gibt es für die Gläser 6, 8, 11 beziehungsweise 23 mögliche Füllstände. Außerdem bleibt die Gesamtmenge des Wassers konstant, sodass sich die Füllmenge eines Glases sich aus den drei anderen Gläsern ergibt.

Wenn das erste Glas leer ist, gibt es für das zweite und dritte Glas insgesamt $8 \cdot 11 = 88$ Möglichkeiten und demnach insgesamt 88 Möglichkeiten. Entsprechend gibt es, wenn das zweite Glas voll ist, insgesamt $6 \cdot 11 = 66$ Möglichkeiten für das erste und dritte Glas und damit insgesamt 66 Möglichkeiten. Analog ergeben sich folgende weitere Anzahlen an Möglichkeiten: erste Glas voll: 88, zweite Glas leer: 66, dritte Glas voll oder leer: je $6 \cdot 8 = 48$. Wenn das vierte Glas voll oder leer ist, müssen alle anderen Gläser leer oder voll sein und es ergibt sich je eine Möglichkeit.

Man erhält in Summe: $2 \cdot (88 + 66 + 48 + 1) = 406$. Die Möglichkeiten, dass das vierte Glas voll (bzw. leer) ist, hat man offensichtlich je viermal gezählt, sodass man 6 Möglichkeiten abziehen kann und auf höchstens 400 Möglichkeiten kommt. Um auf weniger als 400 Möglichkeiten zu kommen, stellt man fest, dass zum Beispiel auch $0,5L, 0,7L, 0L, 1,0L$ dreimal gezählt wurde.