

Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats *Oktober 2012*:

a) Die Anzahl der Zahnstocher beträgt 157. Es gilt $a + b = 1 + 5 = 6 < 7 = c < 8 = 2 \cdot 5 - 2 = 2 \cdot b - 2$ und damit ist die Ungleichung erfüllt.

(Herleitung: Wegen $a + b < c < 2b - 2$ gilt $a + b + 1 \leq c$ und $c \leq 2b - 3$, also $a + b + 1 \leq 2b - 3$ und demnach $a \leq b - 4$. Wegen $a \geq 1$ folgt $b \geq 5$ und mit $2b - 2 < 10$ folgt $b = 5$. Wegen $1 \leq a \leq b - 4 = 1$ folgt $a = 1$ und mit $6 = a + b < c < 2b - 2 = 8$ folgt $c = 7$.)

b) Da bei den Hunden mehr Eicheln als Kastanien verbraucht werden, müssen Waldmensen gebaut worden sein. Bei den Waldmensen benötigt man zwei Kastanien mehr als Eicheln. Dies bedeutet, dass mindestens vier Waldmensen gebaut wurden, damit mindestens acht Kastanien mehr verbraucht wurden.

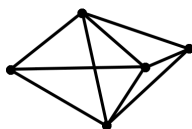
Man betrachte nun alle Hunde und Waldmensen außer vier der Waldmensen. Bei diesen Figuren wurden gleich viele Kastanien und Eicheln verbaut. Da man bei den Waldmensen zwei Kastanien mehr als Eicheln und bei den Hunden vier Kastanien weniger als Eicheln benötigt, sind darunter doppelt so viele Waldmensen wie Hunde. Man erhält: Die Anzahl der Waldmensen ist die um vier vergrößerte Anzahl der doppelten Anzahl der Hunde.

Bei drei Hunden gäbe es entsprechend zehn Waldmensen und es wären weniger als 15 Figuren. Bei sieben Hunden gäbe es $2 \cdot 7 + 4 = 18$ Waldmensen. Dies ergibt $7 \cdot 1 + 18 \cdot 4 = 79$ Kastanien, wobei nur 73 Kastanien vorhanden sind. Die Anzahl der Hunde liegt also zwischen vier und sechs. Man erhält folgende Lösungen:

Hunde	Waldmensen	Figuren	Kastanien	Eicheln
4	$2 \cdot 4 + 4 = 12$	$4 + 12 = 16$	$4 \cdot 12 + 1 \cdot 4 = 52$	$2 \cdot 12 + 5 \cdot 4 = 44$
5	$2 \cdot 5 + 4 = 14$	$5 + 14 = 19$	$4 \cdot 14 + 1 \cdot 5 = 61$	$2 \cdot 14 + 5 \cdot 5 = 53$
6	$2 \cdot 6 + 4 = 16$	$6 + 16 = 22$	$4 \cdot 16 + 1 \cdot 6 = 70$	$2 \cdot 16 + 5 \cdot 6 = 62$

Man erkennt, dass sich die Anzahlen der Kastanien und Eicheln um 8 unterscheiden und die Anzahl der Zahnstocher wird wegen $5 \cdot 22 = 110 < 157$ nicht überschritten.

c) Es folgt ein Beispiel für eine solche Figur (Punkte sind Eicheln und Verbindungen sind Zahnstocher).



Jede Eichel befindet sich an einem Zahnstocher, da die Figur zusammenhängend ist und es mindestens einen Zahnstocher gibt. Ordnet man also jedem Zahnstocher die Eicheln an seinen Enden zu, so hat man jede Eichel mindestens einmal einem Zahnstocher zugeordnet. Da an den Enden eines Zahnstochers höchstens zwei Eicheln sind, ist die doppelte Anzahl der Zahnstocher mindestens so groß wie die Anzahl der Eicheln.