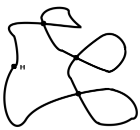
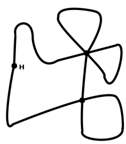
Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats *März 2012*:

a) Mark benötigte mit seinen Eltern für die gesamte Strecke dreimal die Zeit von den letzten $6\,km$, da diese die Hälfte der vorherigen Zeit ausgemacht haben. Dabei verteilen sich die ersten beiden der drei Zeitabschnitte auf die ersten $6\,km$ gleichmäßig (nach Aufgabenstellung). Das bedeutet, dass die letzten $\frac{6\,km}{2}+6\,km = 3\,km+6\,km = 9\,km$ (zwei Zeitabschnitte) in der doppelten Zeit der letzten $6\,km$ (ein Zeitabschnitt) gelaufen wurden. Damit wurde für die letzten $6\,km$ eine Zeit von $1\,h$ benötigt und somit insgesamt eine Zeit von $3\,h$ (drei Zeitabschnitte).
Für die ersten $6\,km$ wurden $2\,h$ benötigt (ersten beiden Zeitabschnitte). Bei gleicher Geschwindigkeit ergibt sich für die gesamten $12\,km$ auch die doppelte Zeit, also $4\,h$.

b) Es folgen zwei Wege wie in der Aufgabenstellung mit 7 bzw. 6 Wegstücken:





Der zweite Teil dieses Aufgabenteils war leider falsch gestellt. Man würde stets eine gerade Anzahl an Wegstücken erhalten, wenn man Wegstücke, welche den Punkt als Anfangs- und Endpunkt besitzen, doppelt zählt. Dann kann man folgendermaßen argumentieren:
Zu jeder Kreuzung müssen stets genauso viele Wege hin- und wegführen. Die Anzahl der angrenzenden Wege ist damit genau doppelt so groß wie die Anzahl der hinführenden Wege (=Anzahl der wegführenden Wege) und damit gerade.
Wir bitten den Fehler zu entschuldigen.

c) Es ergibt sich folgende Vermutung: Addiert man die Anzahl der Kreuzungen und der Gebiete so erhält man stets die um 1 vergrößerte Anzahl der Wegstücke.
Ein Weg mit 12 Gebieten und 19 Kreuzungen hätte demnach 30 Wegstücke.
An jede Kreuzung außer dem Haus grenzen mindestens vier Wegstücke und an das Haus grenzen zwei Wegstücke (wobei wieder Wegstücke mit Anfangs- und Endpunkt an einer Kreuzung doppelt gezählt werden). Demnach würden an die Kreuzungen insgesamt mindestens $4 \cdot 18 + 2 = 74$ Wegstücke grenzen. Jedes Wegstücke kann jedoch genau zwei Kreuzungen (welche nicht unbedingt verschieden sind) zugeordnet werden. Demnach müsste es mindestens $\frac{74}{2} = 37$ Wegstücke geben, im Widerspruch zu der Anzahl der Wegstücke. Ein solcher Weg kann nicht existieren.
(Hinweis: Das doppelte Zählen der Wegstücke mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ist korrekt, da auch alle anderen Wege durch die verschiedenen Kreuzungen doppelt gezählt werden und gerade dies durch das Teilen durch 2 aufgehoben wird.)
Man kann auch so argumentieren, dass es stets mindestens so viele Gebiete wie Kreuzungen geben muss.