LSGM

Ein Projekt zum Jahr der Mathematik
im Wissenschaftssommer Leipzig 2008

Wissenschaftsjahr 2008
Mathematik
Alles, was zählt

Begleitmaterial Klasse 7 bis 11

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

http://www.lsgm.de/stadtrallye

An der Erarbeitung dieser Materialien waren beteiligt

Steffen Hintze
Andreas Nareike
Ines Petzschler
Karina Röder
Uwe Schulze
Almut Tröller

sowie Lehramtsanwärter/innen aus den Gruppen GS11 und GS 12 des Jahrgang 2008 am Staatlichen Lehrerseminar Leipzig.

Wenn zwei Menschen ein Schaf gegen eine Ziege tauschen,
so hat jeder danach noch immer nur ein Tier.
Wenn sie aber eine Idee gegen eine andere Idee tauschen,
dann hat jeder von ihnen danach zwei Ideen.

Vorwort

Das vorliegende Begleitheft zur „Stadtrallye – Mathematik vor der Haustür entdecken“ rundet unser Angebot ab, mit dem wir Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern einen nachhaltigen Eindruck vermitteln wollten, dass Mathematik im Alltag eine wichtige Rolle spielt und eigentlich an allen Ecken und Enden hervorlugt.

Das Projekt wäre ohne die vielen Helfer in der Vorbereitungs- und Durchführungsphase nicht denkbar. Ihnen allen, ihrem unermüdlichen und unentgeltlichen Engagement, gilt unser besonderer Dank.

Wir haben viel Energie in die Vorbereitung dieser einen Woche gesteckt und sind bemüht, unser Projekt auch über den Sommer 2008 hinaus am Leben zu erhalten. Die Materialien bilden den Grundstein eines entsprechenden Angebots im aufzubauenden Leipziger Phymatikum. Sie können darauf zurückgreifen, wenn Sie mit Ihren Schulklassen allein oder mit Partnern eine eigene Rallye organisieren wollen. Wir möchten mit interessierten Partnern zugleich diesen Grundstock weiterentwickeln.

Andreas Nareike
Projektkoordination Stadtrallye

Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe
Beisitzer im Vorstand der LSGM

Ort: Zeitgeschichtliches Forum (Start/Ziel)
Aufgabe: A003

Die Taschenlampe

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Stellt euch vor, es herrscht finstere Nacht in ganz Leipzig ist der Strom ausgefallen und nicht einmal der Mond ist zu sehen. Vier Personen stehen vor dem Eingang des City-Tunnels und müssen dringend auf die andere Seite, da von dort ihr Bus abfährt.

Der dunkle Tunnel kann zu Fuß durchquert werden und glücklicherweise haben die vier Personen genau eine funktionierende Taschenlampe. Jedoch dürfen aus Sicherheitsgründen maximal 2 Leute gleichzeitig durchgehen. Zu allem Unglück sind sie unterschiedlich fit: Frau Race braucht 1 Minute, Frau Walk 2 Minuten, Herr Slow 5 Minuten und Herr Snail 10 Minuten um von einer Seite des Tunnels zur anderen zu gelangen.

Wie kann die Gruppe ihren Bus noch erwischen, der in 17 Minuten abfährt?

Lösung für A003

Zunächst gehen Frau Race und Frau Walk zusammen mit der Taschenlampe durch den Tunnel. Dies dauert 2 Minuten. Dann geht Frau Walk allein mit der Taschenlampe zurück. Dies dauert nochmals 2 Minuten, somit sind bisher 4 Minuten vergangen. Sie übergibt die Lampe an Herrn Slow, der zusammen mit Herrn Snail 10 Minuten bis zum Ende des Tunnels benötigt. Bislang sind also 14 Minuten vergangen. Die Herren übergeben die Taschenlampe an Frau Race, welche sie innerhalb einer Minute an den Anfang des Tunnels bringt, wo Frau Walk auf sie wartet. Damit sind 15 Minuten vergangen. Nun gehen beide in 2 Minuten zum Ende des Tunnels, wo sie wieder auf die Herren treffen. Insgesamt sind dann 17 Minuten vergangen. Voilà.

Ort: Zeitgeschichtliches Forum (Start/Ziel)
Aufgabe: A004

Vier Farben

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Um Stadtpläne und Landkarten möglichst übersichtlich und informativ zu gestalten, werden verschiedene Gebiete unterschiedlich eingefärbt.

Aber nicht nur Stadtplangestalter sondern auch Mathematiker beschäftigen sich mit Farben. So besagt zum Beispiel der sogenannte Vier-Farben-Satz, dass vier Farben immer ausreichen, um eine Landkarte so einzufärben, dass keine zwei benachbarten Länder dieselbe Farbe erhalten.

Auf dem Ausschnitt eures Stadtplanes, den ihr in eurer Tasche findet, sind verschiedene Gebiete durch Straßen voneinander abgegrenzt. Versucht nun, diesen Ausschnitt mit vier Farben so zu gestalten, dass keine zwei an einer Straße angrenzenden Gebiete dieselbe Farbe erhalten.

Lösung für A004

Es gibt mehrere Lösungen. Die Schülervariante ist zu überprüfen.

Ort: Brunnen vor der Oper
Aufgabe: A006

Füll mich ab!

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Im Jahre 1866 wurde das Wasserwerk Connewitz in Leipzig in Betrieb genommen, genauso wie die Behälteranlage Probstheida und eine erste Hochdruckwasserleitung. Bis dahin nutzten die meisten Leipzigerinnen und Leipziger Brunnen, um sich mit Wasser zu versorgen.

Stellt euch vor, es ist das Jahr 1808 und ihr trefft hier am Brunnen vor der Oper den kleinen Ludwig. Ludwig soll genau 6 Liter Wasser nach Hause bringen. Da er sein Haus sehr schnell verlassen hat, nahm er anstelle des 6 Liter Eimers den 9 Liter Eimer mit. Hier am Brunnen stand damals noch ein 4 Liter Eimer.

Könnt ihr Ludwig helfen, mit dem 4 Liter Eimer und dem 9 Liter Eimer genau 6 Liter abzufüllen? Wie funktioniert dies?

Lösung für A006

Zunächst ist der 9-Liter-Eimer zu füllen. Mit Hilfe des 9-Liter-Eimers ist dann der 4-Liter-Eimer zweimal zu füllen und anschließend auszugießen. Somit befindet sich nun im 9-Liter-Eimer ein Liter Wasser, während der 4-Liter-Eimer leer ist. Der eine Liter Wasser ist nun in den 4-Liter-Eimer umzufüllen. Dann ist der 9-Liter-Eimer aus dem Brunnen zu füllen. Mit dem gefüllten 9-Liter-Eimer wird jetzt der 4-Liter-Eimer gefüllt. Da sich in diesem bereits ein Liter Wasser befand, passen noch genau 3 Liter hinein. Im 9-Liter-Eimer verbleiben die gesuchten 6 Liter Wasser.

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Ort: Moritzbastei
Aufgabe: A007

Eine geheime Nachricht

Der berühmte Leipziger Mathematiker Felix Klein hat euch eine Nachricht hinterlassen. Aus Angst davor, dass diese Nachricht von einer unbeteiligten Person gelesen werden könnte, hat er sie verschlüsselt. Findet an der Moritzbastei den Schlüssel, der euch hilft, diese Zeilen zu dechiffrieren.

> bmmf qbfebhphfo tjoe tjdi fjojh: nbo nvtt wps bmmfn uvfdiujh nbuifnbujl usfjcfo, xfjm jisf lfoouojt gvfst mfcfo hspfttufo ejsflufo ovuafo hfxbfisu.

Lösung für A007

An der Moritzbastei findet man den Schlüssel a $\rightarrow$ b. Die richtige Lesart dazu ist: Um den Klartext in den verschlüsselten Text zu überführen, muss jeder Buchstabe durch seinen direkten Nachfolger im Alphabet ersetzt werden. Um den Text zu entschlüsseln, muss also jeder Buchstabe durch seinen *Vorgänger* im Alphabet ersetzt werden. So erhält man aus dem unverständlichen Kauderwelsch folgenden Satz:

> Alle Pädagogen sind sich einig: man muss vor allem tüchtig Mathematik treiben, weil ihre Kenntnis fürs Leben größten direkten Nutzen gewährt.

Diese Art der Verschlüsselung heißt auch Caesar-Verschlüsselung. Der Name geht darauf zurück, dass der bekannte römische Feldherr Julius Caesar diese Art von Verschlüsselung benutzte, um geheime Botschaften mit seinen Truppen auszutauschen.

Ort: Speck’s Hof, Grimmaische Straße (E4)
Aufgabe: A008

Nachzeichnen möglich?

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Mathematiker interessiert mitunter, ob bestimmte Figuren in einem Zug gezeichnet werden können, ohne eine Kante doppelt zu zeichnen. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist das Haus vom Nikolaus.

In der Grimmaischen Straße gegenüber von Speck’s Hof ist die kleine Bäckerei Ditsch (E4). Könnt ihr das Symbol dieser Bäckerei in einem Zuge nachzeichnen, ohne eine Kante doppelt zeichnen zu müssen?

Findet nun auf der gegenüberliegenden Seite von Speck’s Hof (in der Nähe des Nikolaikirchhofs) ein großes Verkehrsschild, welches auf die Straße gemalt wurde. Könnt ihr dieses in einem Zug nachzeichnen, ohne eine Kante doppelt zeichnen zu müssen?

Lösung für A008

Das Symbol der Bäckerei Ditsch ist eine Brezel, die problemlos nachgezeichnet werden kann, ohne eine Kante doppelt zu zeichnen. Auf der anderen Seite von Speck's Hof befindet sich ein Parkverbotsschild auf der Straße. Dies kann nicht in einem Zuge nachgezeichnet werden, ohne eine Kante doppelt zeichnen zu müssen. Die graphentheoretische Begründung der Unlösbarkeit dieser Aufgabe sind die 4 ungeraden Knoten, die dieser Graph enthält.

Ort: Altes Rathaus
Aufgabe: A009

In einem Taxi nach Paris

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

An einer Seite des Marktplatzes stehen Taxis und warten darauf, dass sie gemietet werden.

Findet heraus, wie weit man für 9 € fahren kann.

Nun löst folgendes Problem: Alex hat sich für 9 € ein Taxi gemietet, um zum Bahnhof zu fahren. Georg wohnt auf der Hälfte des Weges und wird mitgenommen. Wie viel Geld muss Georg gerechterweise zahlen?

Lösung für A009

Durch Nachfragen bei einem Taxifahrer erfährt man, dass man für 9 € etwa 5 km weit fahren kann. Nur für Referenzzwecke: Laut der offiziellen Verordnung über Beförderungsentgelte für Taxen im Bereich Leipzig vom April 2006 sind es etwa 4,5 km. Es gilt

$$\begin{aligned} 9\,€ &= 2{,}10\,€ && \text{(Grundgebühr)} \\ &\quad +2 \cdot 1{,}90\,€ && \text{(für den 1. und 2. Kilometer)} \\ &\quad +(x - 2\,\text{km}) \cdot 1{,}25\,€ && \text{(für jeden weiteren Kilometer)} \end{aligned}$$

Stellt man diese Gleichung nach x um, so erhält man $x = 4{,}480\,\text{km}$).

Die zweite Aufgabe löst man wie folgt:

Variante 1 (nicht optimal): Georg muss 2,25 € bezahlen. Mögliche Argumentation: Für die Hälfte des Weges sind 4,50 € zu zahlen. Diesen Preis teilen sich beide. Also zahlt Georg 2,25 € und Alex 6,75 €.

Variante 2 (gerechter): Georg muss 3 € bezahlen. Mögliche Argumentation: Nach Variante 1 bezahlt Alex dreimal so viel wie Georg. Das wäre gerecht, wenn er auch die dreifache Strecke gefahren wäre. Dem ist aber nicht so, denn Georg steigt auf der Hälfte ein. Also fährt Alex doppelt so weit wie Georg, gerecht wäre es also, wenn er auch nur doppelt so viel zahlt wie Georg. Somit ergeben sich 3 € für Georg und 6 € für Alex.

Ort: Zeitgeschichtliches Forum (Start/Ziel)
Aufgabe: A013

Der Streit

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

In der Leipziger Innenstadt kann man auf ausgefallene Art und Weise von einem Ort zu einem anderen gelangen – mit einer Fahrradrikscha.

Stellt euch nun folgende Situation vor: Die drei berühmten Leipziger Leibniz, Bach und Klein wollen vom Marktplatz zum Bayrischen Bahnhof fahren. Sie haben dafür einen Rikschafahrer angehalten, der für genau eine Person Platz hat. Leibniz und Klein sind gute Freunde, aber Leibniz und Bach mögen sich nicht. Auch Bach und Klein streiten sich immer. Zu dritt kommen sie jedoch gut miteinander klar. Nun muss der Rikschafahrer darauf achten, dass niemals zwei Streithähne allein am selben Ort sind.

Wie kann der Rikschafahrer die drei zum Bayrischen Bahnhof fahren, ohne dass es zu Zwischenfällen kommt?

Lösung für A013

Zunächst fährt der Rikschafahrer Bach zum Bayrischen Bahnhof. Leibniz und Klein bleiben zurück, aber sie sind gute Freunde und nichts passiert. Dann kommt der Rikschafahrer allein vom Bayrischen Bahnhof zurück und nimmt Leibniz mit. Klein muss am Marktplatz allein warten, Bach steht derweil am Bayrischen Bahnhof. Als der Rikschafahrer mit Klein am Bayrischen Bahnhof ankommt, lässt er ihn aussteigen und nimmt danach Bach wieder mit zum Marktplatz, damit die beiden zusammen keinen Streit anfangen. Am Marktplatz lässt er dann Bach aussteigen und fährt nun Klein zum Bayrischen Bahnhof. Dort wartet bereits Leibniz auf ihn. Dann fährt der Rikschafahrer ohne Gast zum Marktplatz und holt dort den wartenden Bach ab. So kommen alle drei am Bayrischen Bahnhof an, ohne dass etwas passiert.

Ort: City-Hochhaus

Aufgabe: A014

Schöne Aussicht

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

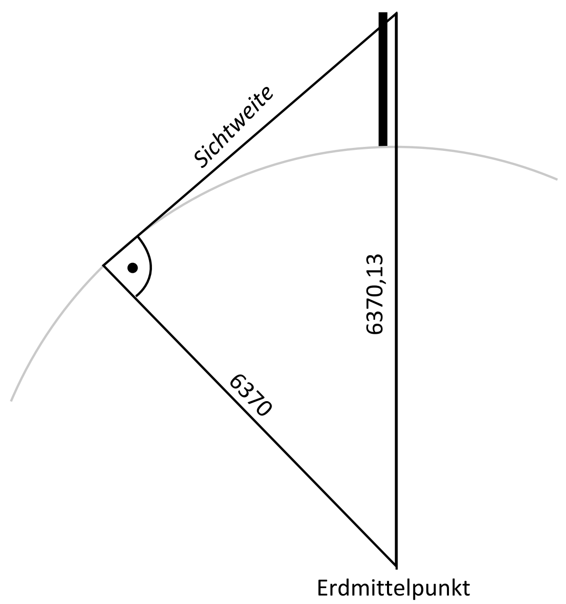
Das höchste Gebäude der Stadt Leipzig ist das bekannte City-Hochhaus. Viele Jahre wurde das Hochhaus von der Universität genutzt. Deshalb wird es von den Leipziger Bürgern auch Uniriese genannt.

Wie weit könnt ihr von der Aussichtsplattform des Hochhauses an einem sonnigen und vor allem klaren Tag sehen?

Tipp: Der mittlere Radius der Erde beträgt 6370 km.

Lösung für A014

Zunächst muss die Höhe der Aussichtsplattform bestimmt werden. Dies geschieht durch Vergleichen mit einem bekannten Maß, mit dem Strahlensatz oder auch ganz praktisch durch Zählen der Stockwerke. Bis zur Spitze sind es 142 m, die Aussichtsplattform befindet sich etwa in einer Höhe von 130 m. Aus diesem Wert berechnet man mit Hilfe des Satzes des Pythagoras die Sichtweite als $\sqrt{6370{,}13^2 - 6370^2}$, also 40,7 Kilometer Luftlinie.



Ort: Moritzbastei

Aufgabe: A015

Fensterbögen modellieren

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

Die Moritzbastei ist der einzige erhaltene Teil der Befestigungsanlagen der Stadt. 1973 entdeckten Studenten auf der Suche nach geeigneten Räumen für einen Club die Reste der Moritzbastei und überzeugten die Universität und die Stadt vom Wiederaufbau. Die Moritzbastei ist heute der größte Studentenclub Europas.

Markant sind die vielen Tor- bzw. Fensterbögen, wie zum Beispiel der an der Kartenvorverkaufsstelle. Nehmt an, der Bogen ist parabelförmig. Modelliert den Fensterbogen durch eine passende Funktion und gebt deren Funktionsgleichung an. Rechnet mit Maßen in Metern und richtet es so ein, dass die x-Achse den Boden darstellt.

Lösung für A015

Der Fensterbogen ist unten etwa 4,20 m breit und in der Mitte 2,30 m hoch. Je nachdem wie man ein Koordinatensystem in den Fensterbogen „hineinlegt", entstehen verschiedene Ansätze für eine passende Funktionsgleichung:

1. Variante (Scheitelpunkt ist auf der y-Achse nach oben verschoben):

Ansatz: $y = ax^2 + b$, Streckungsfaktor a und Verschiebeparameter b sind zu ermitteln. Die y-Koordinate des Scheitelpunktes ist b, also $b = 2{,}3$. Auf dem Boden ist die Breite des Bogens 4,20 m, d.h. die beiden Nullstellen der Parabel sind $2{,}1$ $-2{,}1$. Setzen wir dies in die Funktionsgleichung ein, erhalten wir $a \approx -0{,}5$. Somit lautet eine Näherungsgleichung für die Parabel $y = -0{,}5x^2 + 2{,}3$.

2. Variante (Koordinatenursprung liegt am linken, unteren Bogenanfang):

Ansatz: $y = a(x - c)^2 + b$, Streckungsfaktor a, Verschiebeparameter b (senkrecht), Verschiebeparameter c (waagerecht) sind zu ermitteln. Gegebene Punkte des Graphen sind $P(0|0)$, $Q(4{,}2|0)$ und der Scheitelpunkt $S(2{,}1|2{,}3)$. Der Scheitelpunkt wurde also um 2,1 m nach rechts (also $c = 2{,}1$) und um 2,3 m nach oben (also $b = 2{,}3$) verschoben. Durch einsetzen des Punktes P erhält man $a \approx -0{,}5$ und somit insgesamt die Näherung $y = -0{,}5(x - 2{,}1)^2 + 2{,}3$.

Ort: Zeitgeschichtliches Forum (Start/Ziel)
Aufgabe: A017

Das Geheimnis der Löwen

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Nehmt euren Stadtplan und zeichnet von der Ecke Katharinenstraße/Böttchergässchen (D3) bis zur Mitte des Nikolaikirchhofs (E5) eine Linie. Diese Linie sei die Basis AB eines gleichschenkligen Dreiecks ABC. Ein Basiswinkel betrage 34° (in südlicher Richtung).

Der fehlende Punkt C liegt genau auf einem Gebäude, zu dem ihr folgende Fragen beantworten sollt:

- Wie viele Löwen „bewachen“ das Gebäude ringsherum?
- Wie heißt das Gebäude, wann wurde es gebaut und wozu diente es früher?

Lösung für A017

- Alte Handelsbörse: Es sind 8 (rechts) + 8 (links) + 6 (hinten) + 4 (vorn) = 26 Löwen.
- Der gesuchte Ort ist die Alte Handelsbörse. Die Börse wurde 1678/79 gebaut und diente als Versammlungsraum für Leipziger Großkaufleute. Die Alte Börse ist im Stile des Frühbarock errichtet und zählt zu den schönsten Baudenkmälern Leipzigs.

Ort: Nikolaikirche
Aufgabe: A018

Glockenschlag

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Angenommen die Glocken des Thomasturmes und des Nikolaiturmes schlagen einmal zur vollen Stunden und zwar genau gleichzeitig. Wenn man direkt an der Nikolaikirche steht, hört man deren Glockenschlag sofort. Der Klang von der Thomaskirche trifft aber aufgrund der Entfernung zeitlich verzögert ein.

- Wie viele Sekunden später ist die Thomasglocke zu hören, wenn man von einer Schallgeschwindigkeit von etwa 300 Meter je Sekunde ausgeht?
- Markiert (durch ein Kreuz) in dem Stadtplan einen Punkt, an dem beide Glockenschläge gleichzeitig zu hören sind.

Lösung für A018

- Die Entfernung zwischen beiden Kirchen (bzw. Kirchtürmen) beträgt ca. 400 m. Dies kann man unter Berücksichtigung des Maßstabs im Stadtplan messen. Für 400 m braucht der Schall etwa 1,3 s.
- Ein offensichtlicher Punkt, an dem die Glockenschläge gleichzeitig zu hören sind, ist z.B. der Punkt der genau in der Mitte zwischen den beiden Kirchtürmen liegt. Darauf können auch jüngere Klassen kommen. Ältere Schüler wissen, dass es theoretisch unendlich viele Punkte gibt, an dem die Glockenschläge gleichzeitig zu hören sind. Zeichnet man eine Strecke von Kirchturm zu Kirchturm ein, so liegen alle diese Punkte auf der Mittelsenkrechten dieser Strecke. Umgekehrt ist jeder Punkt auf der Mittelsenkrechen ein solcher Punkt.

Ort: Petersstraße (F3)
Aufgabe: A020

Seiltanz in der Petersstraße

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Die Petersstraße zählt zu den geschäftigsten Straßen Leipzigs. Hier findet man viele große Geschäfte und auch den Petersbogen, in dem ein riesiges Kino untergebracht ist. Jeden Tag laufen daher tausende Menschen durch diese Straße. Wen wundert es also, dass hier mit großen Bannern hoch über der Straße für verschiedene Veranstaltungen geworben wird? Die Banner werden auf vier parallele Seile gespannt, die fest auf beiden Straßenseiten verankert sind.

- Wie lang sind diese Seile?
- Welche Maße hat ein Werbebanner?
- Wieviel Quadratmeter Plane werden für ein Werbebanner verwendet?

Lösung für A020

Diese Aufgabe kann man sehr gut lösen, indem man die Strecke direkt unter den Seilen abläuft und die Schritte oder Füße („Kaffeebohnen“) zählt. Den Abstand der Seile kann man sehr gut anhand der Fenster direkt neben den Seilen schätzen oder indem man den Abstand mit einem anderen bekannten Maß vergleicht. Man erhält:

- Länge der Seile: ca. $20\,\mathrm{m}$
- Abstand der Seile: ca. $60\,\mathrm{cm}$
- Maße eines Banners: $10\,\mathrm{m} \cdot 60\,\mathrm{cm}$
- Fläche eines Banners: $6\,\mathrm{m}^2$

Ort: Blechbüchse
Aufgabe: A021

Der alte Wagner

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Der weltberühmte Komponist Richard Wagner wurde 1813 in Leipzig geboren. Sein Geburtshaus befand sich da, wo heute das ehemalige Kaufhaus Konsument am Brühl, auch bekannt als „Blechbüchse“, steht. An ihn erinnert eine Gedenktafel, die an diesem Gebäude angebracht ist.

- Wie alt ist der Schöpfer zahlreicher Opern geworden?
- Bestimmt sein Alter in Tagen.
- Wie alt wäre er, wenn er heute noch leben würde?

Lösung für A021

Wagner lebte vom 22.05.1813 bis zum 13.02.1883.

- Am 22.05.1883 hätte Richard Wagner seinen 70. Geburtstag gefeiert (da 1883-1813 = 70). Leider ist er schon im Februar gestorben und ist deswegen nur 69 Jahre alt geworden.

- Wir rechnen so, dass Richard Wagner am 23.05.1813 einen Tag alt war (und nicht etwa zwei Tage). 1813 wurde er am 31. Mai daher 9 Tage alt und am 31. Dezember 1813 dann 223 Tage alt, denn es ist $9 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 31 = 223$. Von 1814 bis 1882 sind es $69 \cdot 365$ Tage. Da es in diesem Abschnitt 17 Schaltjahre gab, kommen noch 17 weitere Tage hinzu (nämlich 17 mal der 29. Februar). Daher wurde Wagner am 31. Dezember 1882 genau $223 + 69 \cdot 365 + 17 = 25425$ Tage alt. Im Jahr 1883 schließlich lebte Wagner noch $31 + 13$ Tage. Als er also am 13.02.1883 starb, war er 25469 Tage alt.

- Am 22.05.2008 wäre er 195 Jahre alt geworden.

Ort: Magazingasse/Neumarkt (G4)
Aufgabe: A022

Wasser für Leipzig

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Die Magazingasse erhielt ihren Namen in Anlehnung an das große sechsstöckige Kornhaus, das im 16. Jahrhundert hier errichtet wurde. Waren wurden damals mit „Schleifen“ befördert. Das waren leichte Schlitten, die von Pferden gezogen wurden. Nun soll ein zylinderförmiges Wasserfass *verkehrsgerecht* durch die Magazingasse gerollt werden.

- Notiert die Maße, welche dieses Fass höchstens haben darf.
- Welches Volumen hätte ein Fass mit genau diesen Maßen?
- Jeder Mensch verbraucht etwa 130 Liter Wasser am Tag – für die Toilette, zum Waschen, zum Kochen und Trinken. Wie viele Menschen könnten ihren täglichen Wasserbedarf mit solchen einem Fass decken?

Lösung für A022

- An der Ecke Magazingasse/Neumarkt findet man Verkehrsschilder. Diese weisen darauf hin, dass ein Objekt, das durch diese Straße gelangen möchte, höchstens 1,8 m breit und 3,4 m hoch sein darf. Da das Fass gerollt werden soll, darf es höchstens eine Höhe von 1,8 m und einen Durchmesser von 3,4 m haben.
- Das Volumen berechnet sich mit der Volumenformel für den Zylinder, also $V = \pi r^2 h$. Man kommt auf ein Volumen von 16,34 m^3, was 16000 Litern entspricht.
- Es können 123 Menschen (16000/130) versorgt werden. Zum Vergleich: In Leipzig leben ca. 500000 Menschen, also über das 4000-fache.

Ort: Hugendubel (F3)
Aufgabe: A024

Die Litfaßsäule

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Die Litfaßsäule trägt ihren Namen zu Ehren ihres Erfinders Ernst Litfaß. Er schlug den Berliner Behörden die Aufstellung von Plakatsäulen vor, um der wilden Zettelkleberei an Bäumen und Hauswänden ein Ende zu setzen.

Am Nordende der Petersstraße befindet sich eine moderne Litfaßsäule.

- Wie viele Quadratmeter Werbefläche bietet sie?
- Vielleicht kennt ihr das Kinderbuch „Moritz in der Litfaßsäule“. Es handelt von einem Jungen, der in einer solchen Säule wohnt. Wie viele Quadratmeter würde er in dieser Litfaßsäule bewohnen?

Lösung für A024

- Die Mantelfläche der zylinderförmigen Säule ist in drei gleichgroße Werbeflächen unterteilt. Eine Fläche besitzt eine Breite von etwa 1,30 m (dies misst man am besten mit einem Maßband oder einem Faden) und eine Höhe von 3,50 m. Somit ergibt sich für A = 1,3 m · 3,5 m = 5,25 m^2. Verdreifachen ergibt eine Gesamtwerbefläche von 15,75 m^2 also rund 16 m^2.
- Der Gesamtumfang beträgt 3 · 1,30 m + 3 · 0,20 m (Abstand zwischen den Werbeflächen) = 4,5 m. Also ist der Radius der Grundfläche $r = u/(2\pi) \approx$ 0,72 m. Damit beträgt der Flächeninhalt der Kreisfläche $A = \pi r^2 \approx$ 1,6 m^2.

Ort: Thomaskirche
Aufgabe: A025

Quadrate gesucht

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Geht zum Hauptportal der Thomaskirche. In welche Himmelsrichtung schaut man, wenn man die Kirche verlässt?

Links und rechts neben der Treppe zum Hauptportal seht ihr eine kleine Mauer, die die Kirche zur Straße abgegrenzt. In der Mauer befinden sich quadratische Löcher, die von einem Gitter verschlossen sind. In jedem dieser Gitter könnt ihr verschiedengroße Quadrate finden, die von den Gitterstäben begrenzt werden.

Wie viele Quadrate sind es insgesamt?

Lösung für A025

Man schaut in Richtung Westen, wenn man die Kirche verlässt. Diese Antwort kann man auch geben, ohne auf den Stadtplan zu schauen wenn man weiß, dass der Turm einer Kirche immer im Osten steht. Da man in entgegengesetzter Richtung die Kirche verlässt, muss das Hauptportal nach Westen weisen.

Es sind 30 Quadrate:

- 16 kleine Quadrate
- 9 Quadrate, die aus 4 kleinen zusammengesetzt sind: vier in den Ecken, vier auf den Kanten und eins genau in der Mitte
- 4 Quadrate, die aus 9 kleinen Quadraten zusammengesetzt sind, nämlich in jeder Ecke eins
- 1 Quadrat, das aus 16 kleinen Qudraten zusammengesetzt ist

Ort: Thomaskirche, vor dem Hauptportal
Aufgabe: A028

Treppe zum Glück

Ein Sprichwort lautet: „Es gibt keinen Fahrstuhl zum Glück, man muss die Treppe nehmen.“ Die Treppe vor dem Hauptportal der Thomaskirche dient allerdings nicht dem Finden des Glücks.

- Welcher Höhenunterschied wird mit dieser Treppe überwunden?
- Angenommen alle Stufen sind gleich hoch. Wie hoch müsste eine Stufe sein, wenn man ihre Anzahl verdoppelt?
- Wie hoch müsste eine Stufe sein, wenn man nur 4 Stufen vor der Kirche haben wollte?
- Zu guter Letzt eine nichtmathematische Frage: Die Stufen vor der Thomaskirche sind verschieden hoch. Warum wird mit der ersten Stufe der geringste Höhenunterschied überwunden?

Lösung für A028

- Vor der Thomaskirche befinden sich 8 Stufen mit einer Höhe von jeweils etwa 15 cm. Damit wird also ein Höhenunterschied von circa 120 cm überwunden.
- Wenn man die Anzahl der Stufen verdoppeln möchte, dann würde dieser Höhenunterschied mithilfe von 16 Stufen zu überwinden sein. Die Höhe jeder Stufe müsste dann also 7,5 cm betragen. Wollte man nur 4 Stufen haben, müsste jede 30 cm hoch sein.
- Die erste Stufe ist wahrscheinlich die niedrigste, um die Treppe einladender zu machen. So kostet es vielleicht weniger Überwindung, mit dem Treppenaufstieg zu beginnen.

Ort: Kartoffelhaus im Barfußgäßchen (E2)
Aufgabe: A029

Der Erdapfel

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

2008 ist nicht nur das Jahr der Mathematik, sondern auch das Internationale Jahr der Kartoffel. Im Barfußgäßchen befindet sich ein erstaunlich großes Exemplar einer solchen Knolle.

- Wie groß müsste ein Mensch sein, der diese Kartoffel mit der dazugehörigen Gabel essen kann?
- Schaut euch nun den Lipsia-Brunnen an. An diesem befindet sich das Gesicht eines großen Mannes. Könnte er mit dieser Gabel essen?

Lösung für A029

Die Gabel ist 8 bis 10 mal so groß wie eine herkömmliche Gabel, dementsprechend müsste die verspeisende Person ähnlich größer sein. Der Mund des Brunnengesichts ist eindeutig zu klein, um die Gabel reinzustecken, deswegen kann er nicht mit dieser Gabel essen.

Ort: Katharinenstraße

Aufgabe: A030

Ein frostiger Geselle

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

Schon mancher, der die Katharinenstraße durchquerte, sah sich plötzlich von oben durch einen frostigen Gesellen beobachtet, der stets einen eleganten schwarzen Smoking trägt und für eine erfrischende Süßigkeit wirbt.

Wer ist gemeint und wie groß mag er wohl sein?

Lösung für A030

Gemeint ist der große Pinguin, der an der Milchbar „Pinguin“ für Speiseeis in vielen verschiedenen Sorten wirbt. Um seine Größe zu bestimmen, vergleicht man ihn aus einigen Metern Entfernung mit einem Objekt bekannter Größe in gleicher Entfernung, z.B. mit einem Mitschüler. Der Pinguin ist ca. 2 m groß.

Ort: Augustusplatz
Aufgabe: A031

Der Brunnen vor der Oper

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Vor der Leipziger Oper befindet sich ein großer kreisförmiger Brunnen mit einer hohen Fontäne. An windigen Tagen wird man schon mal von einem feinen Regenschleier überzogen, wenn man in der Nähe des Brunnens steht. Das Becken ist flach und lädt zum Durchwaten ein.

- Wie viel Liter Wasser sind in dem Becken?
- Könnt ihr auch bestimmen, wie hoch die Fontäne ist?

Lösung für A031

- Das Wasserbecken ist mit sehr guter Näherung ein (sehr flacher) Zylinder. Den Durchmesser direkt zu bestimmen ist etwas schwierig, da die Mitte nicht frei zugänglich ist. Stattdessen kann man den Umfang relativ bequem messen (z.B. durch Abschreiten oder durch mehrfaches Anlegen eines Maßbandes). Man erhält einen Umfang von ca. 113 m. Daraus berechnet mittels der Formel $r = u/(2\pi)$ einen Radius von ca. 18 m. Die Tiefe des Wassers misst man leicht am Rand. Sie beträgt etwa 12 cm. Nun benutzt man die Volumenformel für den Zylinder, $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, und erhält ein Volumen von etwa 122 Kubikmetern, was 122000 Litern entspricht (also dem Fassungsvermögen von ca. 1000 Kühlschränken).

- Wenn die Fontäne angestellt ist, kann man sehr leicht ihre Höhe bestimmen, etwa durch Vergleichen mit einem bekannten Maß in gleicher Entfernung. Dazu eignet sich die Höhe des annähernd halbkugelförmigen Sockels, aus dem die Fontäne austritt. Entledigt man sich Schuhen und Strümpfen, kann man diese schnell durch Messen bestimmen, sie beträgt etwa 85 cm. Die Fontäne erreicht eine Höhe von 14 m bis 17 m. Will man die Höhe trockenen Fußes bestimmen, so kann man dies mit Hilfe des Strahlensatzes tun.

Ort: Alte Handelsbörse
Aufgabe: A032

Kugeln an der Handelsbörse

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Auf dem Naschmarkt steht die Alte Handelsbörse. Als sie 1687 fertig gestellt wurde, war sie das erste Leipziger Gebäude, das im Barockstil erbaut wurde. Es ist prunkvoll verziert und wirkt wie ein monumentaler Block. Früher wurden in den Gewölben des Erdgeschosses wichtige Geschäfte abgeschlossen.

- Auf der Brüstung vor dem Eingang seht ihr viele Steinkugeln. Wie viele sind es?
- Die Dichte einer Kugel ist etwa 2,7 g/cm^3. Welche Masse hat eine dieser Kugeln?
- Die Stadt möchte die Kugeln zur Verzierung und zum Schutz vor der Witterung mit einer Blattgoldschicht überziehen. Welche Gesamtfläche ist zu vergolden?

Lösung für A032

- Es sind 22 Kugeln. Wenn man berücksichtigt, dass die Kugeln symmetrisch verteilt sind, kann man das Zählen etwas abkürzen.

- Mit einem Maßband ermittelt man zunächst den Umfang an der breitesten Stelle. Daraus erhält man mit Hilfe der Umfangsformel für den Kreis, also $u = 2\pi r$, dass der Radius r einer Steinkugel 17,5 cm beträgt. Mit der Volumenformel für die Kugel, also $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, berechnet man ein Volumen von ca. 22000 cm^3. Die Masse schließlich erhält man mit der bekannten Formel $m = \rho \cdot V$, wobei ρ die Dichte ist. Man kommt somit auf eine Masse von ca. 60 kg.

- Zunächst berechnet man den Oberflächeninhalt der gesamten Kugel mit der Formel $A_O = 4\pi r^2$. Man berechnet einen Wert von ungefähr 3848 cm^2. Allerdings muss nicht die ganze Kugel vergoldet werden, eine kleine Kugelkappe fehlt – nämlich die Auflagefläche der Kugel. Mit einem Faden kann man bequem den Umfang an der Stelle abnehmen, an der die Kugel in der Säule „versinkt“. Daraus erhält man einen Radius von 10 cm. Der Einfachheit halber nähern wir die Kugelkappe durch Kreis mit einem Radius von 10 cm an. Dieser hat einen Flächeninhalt von ca. 314 cm^2 (berechnet mit der Formel $A = \pi r^2$). Die zu vergoldende Fläche ist also 3848 cm^3 - 314 cm^3 $\approx$ 3500 cm^2.

Ort: Gewandgäßchen (F4)
Aufgabe: A033

RushHour

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Ein echter Geheimtip für alle, die Puzzle- und Knobelspiele lieben, ist der Spieleladen CAPITO. Dort gibt es das bekannte Spiel RushHour. Ziel des Spiels ist es, das rote Auto zur Ausfahrt zu bewegen. Dazu müssen andere Autos vor- und zurückgefahren werden.

Verschafft dem roten Auto mit möglichst wenigen Zügen freie Fahrt. Ihr könnt zwischen drei verschiedenen Schwierigkeitsstufen wählen und bekommt für die richtige Lösung 1, 2 oder 3 Stempelpunkte.

Lösung für A033

Eine bestimmte Zugfolge. Muss vor Ort kontrolliert werden.

Ort: Nikolaikirchhof

Aufgabe: A034

Leuchtende Steine

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

In der Abenddämmerung kann man auf dem Nikolaikirchhof ein besonderes Schauspiel beobachten:

Nach und nach leuchten immer mehr Pflastersteine farbig auf – jede Minute kommt einer dazu. Diese Lichter erinnern daran, wie sich im Herbst ’89 jeden Montag Leipziger Bürger auf dem Nikolaikirchhof versammelten, um friedlich für eine Wende zu demonstrieren.

- Wie viele dieser Lichtsteine befinden sich auf dem Platz?
- Angenommen man würde alle Steine zusammenlegen: Wäre die Fläche groß genug, um einen „echten“ PKW darauf zu parken?

Lösung für A034

- Es sind 150 Steine.
- Ein Stein ist quadratisch und hat die Maße 15 cm · 15 cm. Dies ergibt eine Fläche von 225 cm^2 pro Stein. Insgesamt sind es also ca. 3,4 m^2. Für ein Auto reicht das nicht.

  Eine andere Möglichkeit wäre folgende: Man zählt die „normalen“ Pflastersteine unter einem PKW, der am Nikolaikirchhof parkt und stellt dann fest, dass darunter ca. 250 bis 300 Steine passen; also die Anzahl der „leuchtenden“ Steine nicht ausreicht um einen PKW darauf zu parken.

Ort: City-Hochhaus

Aufgabe: A035

Der Uniriese

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

Das höchste Gebäude der Stadt Leipzig ist das bekannte City-Hochhaus. Viele Jahre wurde das Hochhaus von der Universität Leipzig genutzt. Deswegen und wegen seiner markanten Form wird es auch Weisheitszahn oder Uniriese genannt.Wie hoch ist das City-Hochhaus?

Lösung für A035

Es sind etwa 142 m bis zur Spitze. Es sind etwa 130 m bis zur Terrasse.

Ort: Cafe Stein, Katharinenstraße (E3)

Aufgabe: A037

Rieseneis

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

Am Beginn der Katharinenstraße macht das Eiscafe Stein mit einer riesigen Eistüte auf sich aufmerksam.

Wie viele „normale“ Eiskugeln passen in die große Eistüte?

Lösung für A037

Die Eistüte lässt sich nicht ganz einfach vermessen, weil die Eiskugeln stören. Man kann aber z.B. in einer Höhe von 1,1 m einen Umfang von 1,55 m messen. Mit einer einfachen Verhältnisgleichung lässt sich bestimmen, dass die Eistüte oben an ihrer dicksten Stelle in einer Höhe von 1,30 m einen Umfang von 1,83 m hat. Mit der Formel für den Umfang eines Kreises, also $u = 2\pi r$, berechnet man aus dem Umfang einen Radius von $r = 0{,}29$ m.

Die Eistüte ist in guter Näherung ein Kegel. Für das Volumen eines Kegels gilt die Formel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Mit den Werten von oben erhält man also ein Volumen von ca. 0,115 m^3 oder 115 Litern.

Da zwischen Eiskugeln immer etwas Platz frei bleibt, kann nicht das gesamte Volumen ausgefüllt werden, sondern vielleicht nur 60% - 70%. Setzt man für eine Eiskugel einen Radius von 2,5 cm an, so hat diese ein Volumen von ca. 65 ml (berechnet mit der Formel für das Kugelvolumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$). Damit erhält man ein Ergebnis von 1000 bis 1200 Eiskugeln.

Ort: Zeitgeschichtliches Forum (Start/Ziel)
Aufgabe: A038

Fläche der Innenstadt

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Im Jahre 1165 erteilte der Markgraf Otto der Reiche von Meißen dem Ort an der Parthe das Stadtrecht und das Marktrecht. Dieser Moment gilt als Gründung der Stadt Leipzig. Mit der Stadtgründung entstanden auch die beiden großen Kirchbauwerke – die Thomaskirche und die Nikolaikirche.

Zur Leipziger Innenstadt zählt das Gebiet innerhalb des Rings. Ermittle die ungefähre Fläche der Innenstadt.

Lösung für A038

Auf dem Stadtplan sieht man, dass die Innenstadt etwa von 20 Planquadraten überdeckt wird (es sind weniger als $5 \cdot 5 = 25$ Planquadrate, durch „Zusammenlegen" erkennt man, dass es etwa 5 Quadrate zu viel sind). Ein Planquadrat ist 0,25 km lang. Der Flächeninhalt beträgt also $1/16\,\text{km}^2 = 0{,}0625\,\text{km}^2$. 20 Quadrate ergeben 1,25 km^2 als Näherungswert für die Flächengröße der Innenstadt.

Ort: Maggi Kochstudio im Petersbogen (F/G 3)
Aufgabe: A039

Leipziger Allerlei

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Der Legende nach ist Leipziger Allerlei eine Erfindung, um Leipzig nach den napoleonischen Kriegen vor ungebetenen Gästen zu schützen. Der Stadtschreiber Malthus Hempel soll vorgeschlagen haben: „Verstecken wir den Speck und bringen nur noch Gemüse auf den Tisch, sonntags vielleicht ein Stückchen Mettwurst oder ein Krebslein aus der Pleiße dazu. Und wer kommt und etwas will, der bekommt statt Fleisch ein Schälchen Gemüsebrühe und all die Bettler und Steuereintreiber werden sich nach Halle oder Dresden orientieren."

Zu einem Familientreffen am Wochenende werden acht Personen anwesend sein. Erkundigt euch im Maggi Kochstudio nach einem Rezept für „Leipziger Allerlei à la Karina". Schreibt das Rezept für acht Personen um.

Lösung für A039

Je 800 g Blumenkohl und Kartoffeln, je ca. 270 g Bohnen, Karotten, Spargel, Erbsen, Salz, ca. 54 g Butter und 54 g Mehl, 700 ml Gemüsebrühe und 700 g Krakauer werden gebraucht. Die anderen Zutaten sollten etwa wie folgt angegeben werden: 1-2 Eigelb, 5-6 EL Sahne.

Die Zubereitungszeit ist nicht unbedingt eine proportionale Größe zur Personenanzahl. Die Lösung könnte eine Zeit zwischen 60 und 90 Minuten sein. (Hier sollte man die Argumente der Schüler beachten, z.B. stehen auch mehr Helfer zur Verfügung, wenn mehr Personen beteiligt sind, usw.) Die Energiemenge von 709 kcal ändert sich nicht.

Ort: Innenstadt
Aufgabe: A043

Fußball

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Im Jahr 2006 fand die Fußballweltmeisterschaft in Deutschland statt.Einige Spiele wurden auch im Leipziger Zentralstadion ausgetragen. Damals wurde ein neuer Fussball entworfen, sein Name war: Teamgeist.

- Erkundet, aus wie vielen regelmäßigen Fünf- und Sechsecken der herkömmliche Fußball besteht.
- Bestimmt den Umfang eines Fußballs.
- Stellt ein regelmäßiges Sechseck her.

Lösung für A043

- Der Fußball besteht aus 12 Fünfecken und 20 Sechsecken.
- Der Umfang eines Fußballs beträgt zwischen 68 cm und 70 cm.
- Es gibt verschiedene Möglichkeiten ein Sechseck zu falten oder auszuschneiden. Hier ist die Kreativität und der Einfallsreichtum der Schüler gefragt. Die Faltfigur oder die ausgeschnittene Figur muss als regelmäßiges Sechseck erkennbar sein.

Ort: Nikolaikirche

Aufgabe: A049

Das Fassungsvermögen

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

Direkt neben der Nikolaikirche findet ihr einen Granit-Brunnen, der keine Fontäne hat, sondern langsam und stetig überläuft. Vielleicht symbolisiert dies das Fass, dass hier an der Nikolaikirche im Herbst 1989 zum Überlaufen gebracht wurde, als sich Woche für Woche immer mehr friedliche Bürger zu Montagsdemonstrationen für die Freiheit versammelten.

Entworfen hat den Brunnen übrigens der Londoner Architekt David Chipperfield. Die Schale des Brunnen besteht aus Lausitzer Granit. Wie viel Liter Wasser fasst sie?

Lösung für A049

Die Schale, in der das Wasser steht, ist näherungsweise eine Halbkugel. Um das Volumen zu berechnen, benötigt man also lediglich den (Innen-)Radius. Diesen kann man durch Überspannen des Brunnens mit einer Schnur messen. Ist die Schnur dazu zu kurz, kann man auch den Umfang des Brunnens ermitteln und daraus mit der Formel $r = u/(2\pi)$ den Radius berechnen. Den Umfang berechnet man am bequemsten, indem man die Platten zählt, die den Brunnen umgeben (es sind 24) und das Bogenstück misst, das am Brunnen anliegt (43 cm). In diesem Fall muss man allerdings vom Radius noch die Wandstärke abziehen. Man kommt auf einen Radius von ca. 1,4 m. Das Volumen der Halbkugel berechnet sich mit $V = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ zu 5,75 m^3, also 5750 Liter.

Ort: Nikolaikirche

Aufgabe: A050

Die Nikolaisäule

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

Neben der Nikolaikirche steht eine große Säule, die manchmal Nikolaisäule genannt wird, aber manchmal auch Friedenssäule. Auf jeden Fall steht die Säule dort zum Gedenken an den 9. Oktober 1989. Das war ein Montag, und zwar der erste Montag, an dem sich die wöchentlichen Friedensgebete im Herbst 1989 zu einer großen Demonstration für die Freiheit ausgeweitet hatten. Diese friedlichen Demonstrationen, an denen sich nun immer mehr Menschen beteiligten, führten zur Wende und schließlich zur Wiedervereinigung.

Die Gedenksäule wurde 1999 errichtet und sieht aus wie eine der Säulen, die in der Nikolaikirche das Dach stützen. Wie hoch ist diese Säule?

Lösung für A050

Am schnellsten lässt sich die Höhe so bestimmen: Man stellt eine Person bekannter Größe neben die Säule. Dann vergleicht man aus einiger Entfernung, wie viele Personen man übereinanderstellen müsste, um die Höhe der Säule zu erreichen. Da die Säule auf einem freien Platz steht, kann man an sonnigen Tagen auch sehr gut die Länge ihres Schattens mit der Länge des Schattens eines Objekts bekannter Größe vergleichen. Mit beiden Methoden kommt man auf eine Höhe von gut 16 m.

Ort: Nikolaikirche/Thomaskirche
Aufgabe: A051

Von Niko zu Tom

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Eines Sonntagsmorgens musste Pfarrer Gottfried Gesangbücher von der Nikolaikirche in die Thomaskirche bringen. Da es recht viele Gesangsbücher waren, war seine Tasche sehr schwer und er stöhnte: „Wenn ich wie ein Vogel fliegen könnte, wäre ich viel schneller am Ziel.“

- Wie lang ist Pfarrer Gottfrieds Weg, wenn er einen möglichst kurzen Weg wählt? Geht davon aus, dass er am Nikolaibrunnen startet und bis zum Bachdenkmal laufen muss.
- Schätzt nun, wie wie lang der Weg eines Vogels wäre, der in schnurgerader Linie fliegt.

Lösung für A051

- Man zeichnet sich einen Streckenzug auf den Stadtplan, der einem möglichen Fußweg entspricht. Dann misst man die einzelnen Teilstrecken und berechnet unter Berücksichtigung des Maßstabs die tatsächliche Länge. Durch Aufaddieren dieser Teillängen erhält man eine Gesamtstrecke von ca. 550 m. Alternativ könnte man die Strecke auch durch Abschreiten messen.
- Man kann die geradlinige Entfernung direkt auf dem Stadtplan messen. Ein relativ genauer Wert ist 430 m.

Ort: Krochhochhaus/Augustusplatz (E5)
Aufgabe: A052

Das Krochhochhaus

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

In der Goethestraße findet ihr auf Höhe des Augustusplatzes einen markanten „Turm“ – das Krochhochhaus. Unverkennbar ist es durch die große Uhr an der Fassade und die Figuren auf dem Dach. Der Uhrturm in Venedig, der Torre dell'Orologio, war das Vorbild für den Architekten German Bestelmeyer.

- Schaut genau hin: Wie viele Glocken befinden sich auf dem Dach?
- Nach der Fertigstellung galten die Figuren als das größte Turmschlagwerk der Welt. Wie groß sind die beiden Glockenmänner?
- Ursprünglich sollte das Krochhochhaus nur 35 m hoch werden. Wie hoch ist es heute?

Lösung für A052

- Auf dem Dach befinden sich drei Glocken. Man muss sehr genau hinschauen, da sich die Glocken nicht nebeneinander befinden, sondern ineinander geschachtelt sind.
- Die weiteren beiden Aufgaben löst man z.B. durch Vergleichen mit einem bekannten Objekt in gleicher Entfernung oder auch mit dem Strahlensatz. Die Größe der Glockenmänner beträgt 3,30 m, das Hochhaus selbst misst 43 m.

Nebenbemerkung: Die Übersetzung der Inschrift „OMNIA VINCIT LABOR“ lautet „Arbeit überwindet alles.“ oder „Arbeit bezwingt alles.“

Ort: Gedenksäule Nikolaikirchhof
Aufgabe: A056

Zahlen erzeugen

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Überall in Leipzig findet ihr Zahlen: Hausnummern, Jahreszahlen oder Geburtsdaten berühmter Leipziger. Aus den Ziffern von Zahlen können neue Zahlen erzeugt werden, indem die Ziffern mit PLUS, MINUS, MAL oder GETEILT DURCH verknüpft werden, aber in der Reihenfolge nicht geändert werden. So könnt ihr zum Beispiel mit Geburtsjahr von Richard Wagner, dem Jahr 1813, die Zahl $11 = 1 + 8 - 1 + 3$ erzeugen.

Findet nun eine vierstellige Zahl vor der Gedenksäule auf dem Nikolaikirchhof.

- Könnt ihr mit den Ziffern dieser Zahl die Zahlen 8, 18 und 27 erzeugen?
- Welches ist die größte Zahl, die ihr erzeugen könnt?

Lösung für A056

Die gesuchte Zahl ist 1989. Mit den Ziffern dieser Zahl kann man die gesuchten Zahlen wie folgt erzeugen: $1+9+8+9 = 27$, $1 \cdot 9 \cdot 8 : 9 = 8$ oder $1 \cdot (9+8) - 9 = 8$, $(1+9-8) \cdot 9 = 18$. Die größte unter den gegebenen Bedingungen erzeugbare Zahl ist $720 = (1+9) \cdot 8 \cdot 9$.

Ort: Altes Rathaus

Aufgabe: A058

Wie hoch ist der Turm?

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

Unter der Leitung des Leipziger Baumeisters Hieronymus Lotter (1497-1580) entstand im Jahre 1556, in nur neun Monaten Bauzeit, das Alte Rathaus. Es zählt zu den schönsten Bauwerken der deutschen Renaissance. 1744 wurde der Turm durch Christian Döring erhöht und mit einer Barockhaube versehen.

Schätzt die Höhe des Rathausturmes.

Lösung für A058

Die Höhe des Turms beträgt etwa 41 m. Es gibt hier ganz verschiedene Möglichkeiten, zu einer Lösung zu gelangen:

1. Man peilt den Turm mit einem Vergleichsmaß bekannter Länge an. Z.B. vergrößert man seine Entfernung soweit, bis der Turm gerade hinter dem Daumen verschwindet. Nach dem Strahlensatz gilt dann, dass das Verhältnis Armlänge/Entfernung gleich dem Verhältnis Daumengröße/Turmhöhe ist. Damit lässt sich die Turmhöhe berechnen.

2. Eine unkonventionelle Lösung, die aber trotzdem nicht als falsch gelten soll: Man schlägt im Touristikladen in der Rathausarkade in einem passenden Buch nach.

3. Man vergleicht die Höhe des Turms mit Etagenhöhe des Tschibo-Ladens (rechts vom Rathaus, wenn man frontal auf den Rathausturm blickt).

Ort: Altes Rathaus
Aufgabe: A059

Raus aus der Mitte

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Wie euch vielleicht aufgefallen ist, steht der Rathausturm des Alten Rathauses nicht in der Mitte. Er teilt die Vorderfront in zwei Abschnitte ein, deren Längen in einem besonderen Verhältnis zueinander stehen, dem sogenannten Goldenen Schnitt. Dieses Teilungsverhältnis wurde schon immer als besonders harmonisch und schön empfunden.

- Wie lang sind die beiden Rathausseiten links und rechts des Turmes? Nutzt dazu die jeweilige Anzahl der großen Bögen.
- Dividiert nun zunächst die Länge der linken Seite durch die Länge der rechten Rathausseite. Dividiert dann die Länge der rechten Seite durch die Gesamtlänge beider Abschnitte. Was stellt ihr fest?

Lösung für A059

Eine Strecke wird genau dann im Goldenen Schnitt geteilt, wenn das Längenverhältnis (Quotient) aus kürzerem Abschnitt zu längeren Teilabschnitt gleich dem Verhältnis aus längerem Abschnitt zur Gesamtlänge der Strecke ist.

- Links des Turmes befinden sich $l = 8$ gleichartige Bögen und rechts $r = 13$ sowie ein kleiner Bogen, der zunächst vernachlässigt wird. Ein Bogen ist etwa 3,20 m breit und 3,70 m hoch. Die Längen und die Abstände zwischen den Bögen können allerdings vernachlässigt werden.
- Beide Längenverhältnisse sind also nahezu gleich! Rechnet man nur mit der Anzahl der großen Bögen, so ergibt sich $l/r = 8/13 \approx 0{,}615$ und $r/(l+r) = 13/21 \approx 0{,}619$.

Ort: Altes Rathaus

Aufgabe: A060

Raus aus der Mitte

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

Der Rathausturm des Alten Rathauses steht nicht in der Mitte. Er teilt die Vorderfront in zwei Abschnitte ein, deren Längen in einem besonderen Verhältnis zueinander stehen, dem Goldenen Schnitt.

- Wie lang sind die beiden Rathausseiten links und rechts des Turmes? Nutzt dazu die jeweilige Anzahl der großen Bögen.
- Dividiert nun zunächst die Länge der linken Seite durch die Länge der rechten Rathausseite. Dividiert dann die Länge der rechten Seite durch die Gesamtlänge beider Abschnitte. Was stellt ihr fest?
- Wird das Verhältnis „goldener“, wenn man den kleinen Bogen rechts des Turmes mit in die Rechnung einbezieht?

Lösung für A060

Eine Strecke wird genau dann im Goldenen Schnitt geteilt, wenn das Längenverhältnis (Quotient) aus kürzerem Abschnitt zu längeren Teilabschnitt gleich dem Verhältnis aus längerem Abschnitt zur Gesamtlänge der Strecke ist.

- Links des Turmes befinden sich $l = 8$ gleichartige Bögen und rechts $r = 13$ sowie ein kleiner Bogen, der zunächst vernachlässigt wird. Ein Bogen ist etwa 3,20 m breit und 3,70 m hoch. Die Längen und die Abstände zwischen den Bögen können allerdings vernachlässigt werden.

- Beide Längenverhältnisse sind also nahezu gleich! Rechnet man nur mit der Anzahl der großen Bögen, so ergibt sich $l/r = 8/13 \approx 0{,}615$ und $r/(l+r) = 13/21 \approx 0{,}619$.

- Nein, der kleine Bogen ist etwa halb so breit wie ein großer, also gilt $l/r = 8/13{,}5 \approx 0{,}593$ und $r/(l+r) = 13{,}5/21{,}5 \approx 0{,}628$. Der Unterschied wird also größer.

Ort: Altes Rathaus

Aufgabe: A061

Verwinkelt

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

Unter der Leitung des Leipziger Baumeisters Hieronymus Lotter (1497-1580) entstand im Jahre 1556, in nur neun Monaten Bauzeit, das Alte Rathaus. Es zählt zu den schönsten Bauwerken der deutschen Renaissance. 1744 wurde der Turm durch Christian Döring erhöht und mit einer Barockhaube versehen.

Am Rathausturm befinden sich direkt unter der großen Uhr drei Fahnenstangen. Schätzt den Winkel zwischen den zwei äußeren Stangen.

Lösung für A061

Hier bestimmt man am besten zunächst einen der beiden (gleichgroßen) Teilwinkel durch Vergleichen mit bekannten Winkeln. Ein Teilwinkel ist sicher kleiner als 90°, aber auch größer als 45°. Mit etwas Erfahrung kann man durch Vergleichen mit einem gleichseitigen Dreieck auch abschätzen, dass ein Teilwinkel sogar größer als 60° ist. Man gelangt schließlich bei 75° als Schätzwert an. Daraus ergibt sich, dass der gesuchte Winkel 150° beträgt.

Ort: Moritzbastei

Aufgabe: A066

Schwere Ausgrabungen

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

Die Moritzbastei ist der einzige erhaltene Teil von Befestigungsanlagen der Stadt, die Kurfürst Moritz von Sachsen 1551-1553 erbauen ließ. Als Baumeister war Hieronymus Lotter eingesetzt.

Etwa 30.000 Studenten halfen 1972/73 bei den Ausgrabungen der Reste der Moritzbastei. Sie entfernten in 150.000 unbezahlten Arbeitsstunden etwa 40.000 Kubikmeter Schutt.

Wie viele Arbeitsstunden hätten 20.000 Studenten leisten müssen?

Lösung für A066

Je weniger Studenten, desto mehr Zeit. 20000 sind zwei Drittel von 30000 Studenten. Ein Drittel der Studenten würde dreimal so viel Zeit brauchen, zwei Drittel brauchen dann die Hälfte vom Dreifachen der Zeit. Also wird insgesamt das 1,5-fache der Stunden benötigt, das sind 225000 Stunden. Oder kurz: Dreisatz mit umgekehrter Vervielfachung verwenden.

Ort: Messehofpassage (F3)
Aufgabe: A067

Farbenspiele

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Durch die Messehofpassage kann man auch bei Regen trockenen Fußes von der Petersstraße zum Neumarkt gelangen. Wenn ihr aufmerksam hindurchgeht, werdet ihr eine Säule finden, auf der verschiedene Reliefs an das rege Markttreiben erinnern. Sicher fällt euch auf, dass über der Säule ein großer weißer „Teller“ angebracht ist, auf den eine Lichterkette verschiedene Farbtupfer wirft. Diese Lichterkette soll demnächst ausgetauscht werden. Wie lang muss sie sein?

Lösung für A067

Einfach ein Maßband anzulegen wird schwierig, weil die Säule im Mittelpunkt steht. Eine einfache Lösung ist, die Steinfließen auf dem Boden zu zählen. Vom Rand des weißen Tellers bis zum Mittelpunkt der Säule sind es 13 Fließen. Eine Fließe (mit Fuge) misst in der Breite 30,3 cm, also hat der weiße Teller einen Radius von ca. 3,90 m. Daraus lässt sich mit $u = 2\pi r$ sein Umfang berechnen. Die Lichterkette sollte demnach also ungefähr 24,5 m bis 25 m lang sein.

Alternativ kann man natürlich auch den Radius der Säule bestimmen (etwa indem man den Umfang der Säule misst) und dann die Entfernung vom Rand der Säule zum Rand des Tellers messen. Durch Addition ergibt sich der Radius des weißen Tellers und man kann weiter vorgehen wie oben.

Ort: Karstadt (F3-F4)
Aufgabe: A068

Rolltreppenforschung

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Geht zu Karstadt und dort zu der Rolltreppe, die vom Untergeschoss zum Erdgeschoss führt. Wie jede Rolltreppe besteht auch diese aus mehreren Metallplatten, die zu Stufen angehoben werden.

- Wie viele Metallplatten sieht man, wenn die Rolltreppe zu einem beliebigen Zeitpunkt anhält?
- Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Rolltreppe?

Lösung für A068

- Die Stufen einer Rolltreppe zählt man am besten, indem man beim Herabfahren das untere Ende fixiert und zählt, wie viele Metallplatten verschwinden, bis man unten angekommen ist. So kommt man im Erdgeschoss auf 29 Platten. (Achtung: Die Zahl der Platten ist von Stockwerk zu Stockwerk verschieden.)
- Um nicht die Länge der gesamten Rolltreppe messen zu müssen, was sich aufgrund der abgeknickten Enden auch schwierig gestaltet, geht man man besten wie folgt vor: Zunächst misst man die Länge einer Metallplatte. Dies geht am besten, indem man sich auf die Rolltreppe stellt und die Platte misst, auf der man gerade steht. Dann stellt man sich neben die Rolltreppe und misst die Zeit, bis z.B. 10 Platten verschwunden sind. Die Geschwindigkeit berechnet sich mit der bekannten Formel $v = s/t$, da sich die Rolltreppe unbeschleunigt bewegt. Man erhält so eine Geschwindigkeit von ca. 0,45 m/s.

Ort: Bildermuseum
Aufgabe: A069

Einfärben bitte!

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

Dies ist das Museum der bildenden Künste. Es befindet sich seit 2004 in diesem Haus und beinhaltet eine große Anzahl berühmter Gemälde, Skulpturen und andere Kunstgegenstände aus verschiedenen Zeitaltern. Für die Künstler sind Farben enorm wichtig.

Aber auch Mathematiker beschäftigen sich manchmal mit Farben. So besagt zum Beispiel der sogenannte Vier-Farben-Satz, dass vier Farben immer ausreichen, um eine Landkarte so einzufärben, dass keine zwei angrenzenden Länder dieselbe Farbe erhalten.

Versucht doch mal, mit vier Farben auf der Karte einen Teil der Leipziger Innenstadt so einzufärben, dass keine zwei benachbarten Gebiete dieselbe Farbe erhalten. Den dafür vorgesehen Ausschnitt findet ihr als Kopie in eurer Tasche.

Lösung für A069

Es gibt mehrere Lösungen. Die Schülervariante ist zu überprüfen.

Ort: Augustusplatz/Goethestraße
Aufgabe: A071

In einem Taxi nach Paris

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

In der Goethestraße stehen Taxis und warten darauf, dass sie gemietet werden.

Findet zunächst heraus, wie weit man für 9 Euro fahren kann.

Nun löst folgendes Problem: John hat sich für 9 Euro ein Taxi gemietet, um zum Bahnhof zu fahren. George wohnt auf der Hälfte des Weges und wird mitgenommen. Wie viel Geld muss George gerechterweise zahlen?

Lösung für A071

Durch Nachfragen bei einem Taxifahrer erfährt man, dass man für 9 € etwa 5 km weit fahren kann. Nur für Referenzzwecke: Laut der offiziellen Verordnung über Beförderungsentgelte für Taxen im Bereich Leipzig vom April 2006 sind es etwa 4,5 km. Es gilt

$$\begin{aligned} 9\,€ &= 2{,}10\,€ && \text{(Grundgebühr)} \\ &\quad +2 \cdot 1{,}90\,€ && \text{(für den 1. und 2. Kilometer)} \\ &\quad +(x - 2\,\text{km}) \cdot 1{,}25\,€ && \text{(für jeden weiteren Kilometer)} \end{aligned}$$

Stellt man diese Gleichung nach x um, so erhält man $x = 4{,}480\,\text{km}$).

Die zweite Aufgabe löst man wie folgt:

Variante 1 (nicht optimal): George muss 2,25 € bezahlen. Mögliche Argumentation: Für die Hälfte des Weges sind 4,50 € zu zahlen. Diesen Preis teilen sich beide. Also zahlt George 2,25 € und John 6,75 €.

Variante 2 (gerechter): George muss 3 € bezahlen. Mögliche Argumentation: Nach Variante 1 bezahlt John dreimal so viel wie George. Das wäre gerecht, wenn er auch die dreifache Strecke gefahren wäre. Dem ist aber nicht so, denn George steigt auf der Hälfte ein. Also fährt John doppelt so weit wie George, gerecht wäre es also, wenn er auch nur doppelt so viel zahlt wie George. Somit ergeben sich 3 € für George und 6 € für John.

Ort: Coffee-Culture (D4)
Aufgabe: A092

Kakao und Kekse

Stadtrallye
Mathematik vor der Haustür entdecken

In ganz Leipzig gibt es drei „Coffee-Culture“-Filialen. Unter anderem findet ihr einen Laden am Brühl 54. Eine Gruppe von zwölf Schülern macht dort eine Pause und jeder stärkt sich. Manche bestellen eine große heiße Schokolade, andere einen Double Chocolate Cookie, aber niemand bestellt zwei Dinge. Zusammen bezahlen sie genau 25,30 €. Wie viele Schüler haben eine heiße Schokolade bestellt, wie viele einen Double Chocolate Cookie?

Lösung für A092

Die Schüler erfragen bei Coffee Culture die Preise für die beiden Produkte: Eine große heiße Schokolade kostet 2,90 €. Ein Double Chocolate Cookie kostet 1 €.

Jüngere Schüler lösen diese Aufgabe durch systematisches Probieren. Eine andere Lösungsvariante ist das Aufstellen eines Gleichungssystems. Dazu bezeichne x die Anzahl der Schüler, die eine heiße Schokolade bestellen, und y die Anzahl derer, die einen Double Chocolate Cookie wählen. Da die Gruppe aus 12 Schülern besteht gilt

$$x + y = 12. \tag{1}$$

Aus den Bestellungen ergibt sich die zweite Gleichung

$$2{,}9 \cdot x + 1 \cdot y = 25{,}30. \tag{2}$$

Zum Lösen stellen wir Gleichung (1) nach y um und setzen in (2) ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 2{,}9 \cdot x + (12 - x) &= 25{,}30 \\ 1{,}9x &= 13{,}30 \end{aligned}$$

Damit ist $x = 7$ und durch Einsetzen von x in (1) erhalten wir $y = 5$. Es bestellen 7 Schüler eine große heiße Schokolade und 5 Schüler einen Double Chocolate Cookie.

Ort: McDonalds in der Peterstraße

Aufgabe: A098

Fast-Food Knobelei

Stadtrallye

Mathematik vor der Haustür entdecken

In der Leipziger Innenstadt gibt es überall kleine Restaurants, Imbissbuden und Fast Food Ketten. Wie ihr sicher wisst, gibt es bei McDonalds Trinkhalme gratis. Mit ihnen kann man – ähnlich wie bei Streichholzknobeleien – die Ziffern von 0 bis 9 legen kann.

- Bestimmt die Anzahl der Trinkhalme, die man benötigt um jede Ziffer – in digitaler Schreibweise – darzustellen.
- Besorgt euch von McDonalds 19 Trinkhalme. Überlegt nun welches die größte Zahl ist, die damit gelegt werden kann, wenn man alle Trinkhalme verwendet. Und welches ist die kleinste Zahl?

Lösung für A098

Die Zahl der Trinkhalme, die für jede Ziffer benötigt werden, kann man in folgender Tabelle ablesen:

Ziffern	8	0, 6, 9	2, 3, 5	4, 7	1
Trinkhalme	7	6	5	4	2

Eine zweistellige Zahl kann mit 19 Trinkhalmen nicht gelegt werden. Die einzige Möglichkeit ist $6 + 6 + 7 = 19$ Röhrchen. Daraus wählt man die größten bzw. kleinsten Ziffern aus und ordnet sie so an, dass sich die größtmögliche bzw. kleinstmögliche Zahl ergbit. Die größte Zahl, die man mit 19 Trinkhalmen legen kann, ist 998. Die kleinste Zahl, die damit legen kann, ist 608.

Wir bedanken uns für die materielle und finanzielle Unterstützung der Projekte der LSGM zum Wissenschaftssommer Leipzig 2008 bei der Deutschen Telekom Stiftung, beim Schulverwaltungsamt der Stadt Leipzig, dem Lehrstuhl Prof. König am Mathematischen Institut der Universität Leipzig, bei der Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Leipzig, den Stadtwerken Leipzig, beim Referat Öffentlichkeitsarbeit der Universität Leipzig, beim Atelier für Kommunikation & Design Gaby Kirchhof sowie beim Zeitgeschichtlichen Forum Leipzig.

Das Projekt „Stadtrallye – Mathematik vor der Haustür entdecken“ wurde in der ersten Staffel des bundesweiten Wettbewerbs „Mathe erleben!“ ausgezeichnet.

Deutsche Telekom Stiftung

Wissenschaftsjahr 2008
Mathematik
Alles, was zählt

Stadtwerke Leipzig

Stiftung Haus der Geschichte
der Bundesrepublik Deutschland
Zeitgeschichtliches Forum Leipzig